

**VARIANTEN DES SATZES VON
HAHN-BANACH
MIT ANWENDUNGEN**

Klaus Ströhle

1973



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554604_0058

V A R I A N T E N D E S S A T Z E S V O N
H A H N - B A N A C H
M I T A N W E N D U N G E N

Dissertation zur Erlangung
der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik
der
Ludwig - Maximilians - Universität
München

vorgelegt von
Klaus Ströhle
aus Balingen
Oktober 1973



Erster Berichterstatter: Professor Dr. G. Hämmerlin
Zweiter Berichterstatter: Dozent Dr. K.-H. Hoffmann
Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 1973

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel	Seite
<u>Einleitung:</u> Abgrenzung des Themas, Problemstellung, Zusammenfassung der Ergebnisse, Überblick über die Literatur	1
Bemerkungen zur Form der Arbeit	3
<u>Kapitel 1:</u> Grundlagen	4
Übersicht, Bemerkungen	4
1.0 Abkürzungen, die Räume $\overline{\mathbb{R}}$, $Q(X)$	7
1.1 Kegel	12
1.2 Operator P	13
1.3 Operatoren S , S_*	18
1.4 Operatoren R , R_*	25
1.5 Operatoren F , Φ	31
1.6 Funktionale, konvexe Funktionale, sublin. Ableitung	34
1.7 Untere Minkowski-Funktionale	40
1.8 Obere Minkowski-Funktionale	42
1.9 Halbstetige Funktionale	44
1.10 Konjugierte Funktionale	45
<u>Kapitel 2:</u> Grundprobleme	46
Übersicht, Bemerkungen	46
2.1 Der Satz von Hahn-Banach	48
2.2 Grundproblem 1, Lösung und Folgerungen	49
2.3 Grundproblem 2, Lösung und Folgerungen	51
2.4 Bemerkung zur numerischen Berechnung von $f(x_0)$	54
<u>Kapitel 3:</u> Eindeutigkeitsfragen zu den Grundproblemen	55
Übersicht, Bemerkungen	55
3.1 Eindeutigkeitskriterien zu den Grundproblemen	56
3.2 Beispiele zu den Eindeutigkeitskriterien	58
<u>Kapitel 4:</u> Spezielle Probleme der Funktionalanalysis	59
Übersicht, Bemerkungen	59
4.1 Existenz- und Fortsetzungssätze für lineare Funktionale	64
4.2 Existenz- und Fortsetzungssätze für stetige lineare Funktionale	66
4.3 Trennungssätze	70
4.4 Lokale Darstellung von sublinearen bzw. konvexen Funktionalen als (obere) Einhüllende	72
4.5 Die lineare Gleichung $Tx=a$ und ihre Lösbarkeit	75
4.6 Über die Subdifferenzierbarkeit eines Funktional	77

Kapitel	Seite
<u>Kapitel 5:</u> Grundzüge einer Dualitätstheorie in der allgemeinen linearen Optimierung	80
Übersicht, Bemerkungen	80
5.1 Ein allgemeines lineares Optimierungsproblem (OP)	82
5.2 Grundzüge einer Dualitätstheorie zu (OP)	85
5.3 Beispiele	86
Literaturverzeichnis	88

EINLEITUNG

Abgrenzung des Themas, Problemstellung, Zusammenfassung der Ergebnisse, Überblick über die Literatur.

Sicher ist der "Satz von Hahn-Banach" einer der grundlegenden Sätze der Funktionalanalysis. In fast unerschöpflichem Maße beschäftigt sich seit etwa 40 Jahren die einschlägige Literatur mit diesem Thema und bringt immer neue Varianten hervor oder entdeckt immer neue Anwendungsmöglichkeiten.

Auch die vorliegende Arbeit ist eine Variation dieses Themas, allerdings nicht in der Allgemeinheit, wie ihr Titel vielleicht versprechen mag.

Um den hier abgehandelten Stoff abzugrenzen, soll zunächst folgende wohlbekannte "Urform" des Satzes von Hahn-Banach angegeben werden, die in dieser Arbeit eine ausgezeichnete Rolle spielen wird (siehe Kapitel 2):

Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

$p: X \rightarrow \mathbb{R}$ sublin.

(Abkürzungen siehe 1.01)

Beh.: $\exists f \in X': f \leq p$

Der Verfasser (abgekürzt: "V.") stellt sich nun folgende allgemeinere Probleme, die er Grundprobleme 1 und 2 nennt:

Grundproblem 1

Vor.: X VR über $\mathbb{R}$; $q \in Q$

Frage: $\exists f \in X': f \leq q$?

Grundproblem 2

Vor.: X top.VR über $\mathbb{R}$; $q \in Q$

Frage: $\exists f \in X': f \leq q$?

Ausgehend von Lösungen dieser Grundprobleme sollen nun allgemeinere Probleme der Existenz linearer bzw. stetiger linearer Funktionale auf reellen Vektorräumen bzw. topologischen Vektorräumen behandelt werden.

Der V. entwickelt nun eine Methode, mit der tatsächlich notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösung der Grundprobleme angegeben werden können: die Methode des "Ersatzfunktionalen" (Kapitel 2). Weiter entwickelt der V. einen Formalismus (Kapitel 1), der gewisse oben umschriebene allgemeinere Probleme auf die Grundprobleme zurückzuführen und so nach einheitlichen Gesichtspunkten zu lösen gestattet. Dabei ergeben sich aus notwendigen bzw. hinreichenden Bedingungen für die Lösung der Grundprobleme entsprechend notwendigen bzw. hinreichenden Bedingungen für die Lösung der betrachteten Probleme. Die Methode des "Ersatzfunktionalen" liefert auch den Schlüssel für die Beantwortung von Eindeutigkeitsfragen zu den Grundproblemen und damit zu wesentlich allgemeineren Problemen (Kapitel 3).

Der V. wendet nun die Ergebnisse der Kapitel 1-2 auf konkrete Probleme der Funktionalanalysis (Kapitel 4 und 5) an und erhält teils bekannte, teils neue Lösungen dieser Probleme.

Obwohl nur reelle Vektorräume betrachtet werden, lassen sich viele Ergebnisse sofort in der üblichen Weise auf komplexe Vektorräume übertragen (nach dem Vorgehen von Bohnenblust-Sobczyk[38]).

Lösungen des Grundproblems 1 unter stärkeren Forderungen an q gaben schon Agnew[37], Weston[60], Musielak-Orlicz[60], Simons[68, Lemma 1, Th. 2, Kor. 3], obwohl die drei zuletzt genannten Arbeiten eher andere Probleme (wie z.B. Fragen der Fortsetzung) als das Grundproblem im Auge hatten. Lösungen des Grundproblems 2 gaben in speziellerem Zusammenhang und etwas verkleidet Fan [56, Th. 13], Hustad[59, Pr. 6] u. Hustad[60, Th. 1].

Es ist für den Verfasser einigermaßen verwunderlich, daß die Bedeutung der Grundprobleme und des hier entwickelten Formalismus bis heute nicht klar erkannt wurde, obwohl schon Agnew[38] konsequent die dort behandelten Probleme mit Erfolg auf seine Lösung des Grundproblems 1 zurückspielte. Nicht einmal Simons [68] hat dies erkannt, obwohl er auf S. 115, z.B. Lemma 4, die Grundzüge des oben erwähnten Formalismus angegeben hat.

Ein "Meilenstein" in der Geschichte der Hahn-Banach-Versionen ist der Satz von Mazur-Orlicz [53 ; 2.41], der von seinen "Vätern" sehr umständlich bewiesen worden war, jedoch schon beträchtlich mehr Anwendungen zuließ als frühere Versionen. Sikorski[53] vereinfachte in derselben Zeitschrift den Beweis; erst Pták [56] und noch besser Simons[68, Kor. 11] lieferten Beweise, die in derselben Richtung liegen wie der in dieser Arbeit entwickelte (Beweis-) Formalismus. Auf weitere Arbeiten hierzu wird an anderer Stelle (dieser Arbeit) eingegangen.

Diese Arbeit fertigte der V. im Rahmen eines Promotionsstipendiums nach dem Graduiertenförderungsgesetz mit wohlwollender Unterstützung von Professor Dr. G. Hämmerlin und Dozent Dr. K.-H. Hoffmann, denen er an dieser Stelle herzlich Dank sagen möchte.

BEMERKUNGEN ZUR FORM DER ARBEIT

Bemerkungen und Erläuterungen werden nur jeweils zu Beginn eines Kapitels gemacht, Beispiele nur am Schluß eines Paragraphen. Ergebnisse und zugehörige Beweise folgen in Kapitel 1 nicht direkt nacheinander, sondern für jeden Paragraphen gesammelt, da Kapitel 1 als Referenzkapitel dient. So haben die Ergebnisse der meisten Paragraphen auf einer Seite Platz!

Einfache bzw. naheliegende Beweise werden unterdrückt!

Zur Bezeichnung von Kapiteln, Paragraphen, Sätzen usw.:
($a, b, c \in \mathbb{N}$) " a, b, c " bedeutet a-tes Kapitel, b-ter Paragraph, c-te Aussage.

Zum Beispiel:

1.3, 4L Lemma 4 im 3. Paragraphen des 1. Kapitels

2.2, 3S Satz 3 im 2. Paragraphen des 2. Kapitels

3.1, 2K Korollar 2 im 1. Paragraphen des 3. Kapitels

(Ausnahme: 1.0!)

Um den Informationsfluß nicht zu sehr zu zerhacken, wird auf die Paragraphen 1.02 und 1.03 oft nicht besonders verwiesen, deshalb ist ein "waches Auge" für das Rechnen mit $\pm\infty$ unumgänglich.

" $\alpha > 0$ " bedeutet " $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \wedge \alpha > 0$ " (es sei denn, $\alpha = +\infty$ verbietet

sich durch die nachfolgende Anwendung, z.B. $\frac{x}{\alpha} \in A$ o.ä.!).

KAPITEL 1

GRUNDLAGEN

Übersicht:

In diesem Kapitel werden diejenigen Begriffe und Tatsachen bereitgestellt, die für die weiteren Kapitel von Bedeutung sind und auf die immer wieder verwiesen werden muß.

Obwohl einige dieser Begriffe und Tatsachen bestimmt auch in anderen Arbeiten zu finden sind, wird im Text nicht auf diese verwiesen, um eine gewisse Abgeschlossenheit der Arbeit zu wahren, um so mehr, als einerseits der V. diese Begriffe und Aussagen zumeist unabhängig von anderen Autoren entwickelt hat und andererseits geeignete Referenzarbeiten, die den in diesem Kapitel behandelten Stoff einigermaßen überdecken, in der Literatur fehlen.

Bemerkungen zu 1.0:

In 1.01 sind zumeist die nicht allgemein gebräuchlichen Abkürzungen und Definitionen aufgeführt, um Unklarheiten zu vermeiden. Die Definition von Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ gemäß 1.02 wurden dem V. durch die Notwendigkeit nahegelegt, die Operatoren S , R und später ω auch für $q \in \mathbb{Q}$ mit $q[X] \supset \{+\infty, -\infty\}$ zu definieren, um lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden. Dies führte erst auf die "Zerlegung" von S bzw. R gemäß 1.31, 1 D bzw. 1.41, 1 D und mittels der Rechenregeln in 1.02 dann auf die praktischen Formen in 1.31, 2 L bzw. 1.41, 2 L.

Darauf wurde der V. auf die Arbeiten [63], [66] und [70] von J.J. Moreau aufmerksam, in denen zwei verschiedene, mit " $\dot{+}$ " und " $\ddot{+}$ " bezeichnete Additionen in $\mathbb{R}$ vorgeschlagen werden, die dieser im Zusammenhang mit der Theorie der konvexen bzw. konjugierten Funktionale entwickelt hatte.

Davon stimmt " $\dot{+}$ " mit der hier verwendeten Addition überein. Die Moreau'sche Addition " $\ddot{+}$ " tritt hier nicht auf; dies liegt daran, daß die behandelten Probleme auf die Grundprobleme der Form " $f \leq q$ " und nicht der Form " $q \leq f$ " zurückgeführt werden. Die (ziemlich einfachen) Beweise der Aussagen in 1.02 werden unterdrückt!

Sicher sind in 1.02 und 1.03 nicht alle Rechenregeln aufgeführt; in Einzelfällen muß dann ein Rechengang gemäß Definition verifiziert werden.

Die Definitionen in 1.03, 5 sind Erweiterungen der in Q_0 üblichen Begriffe. Diese drängten sich dem V. durch die entsprechenden Operatoren P, S, R, co auf, die für bislang meist übliche Argumente $\in Q_1$ bisweilen Funktionale lieferten, die nicht mehr in Q_1 lagen. Durch die Definition in 1.03, 5 ist Pq, Sq usw. stets pos.hom. bzw. subadd. usw.; dieses Vorgehen wurde durch die Einfachheit der damit formulierbaren Tatsachen vollauf bestätigt. Unabhängig davon sind dieselben Definitionen auch bei Moreau in [70], z.T. schon in [63] und [66] zu finden, der diese Begriffe ebenfalls im Zusammenhang mit der Theorie der konvexen bzw. konjugierten Funktionale eingeführt hat.

Bemerkungen zu 1.1:

Die Definitionen in 1.1, 1 erweisen sich als nützlich, da sie dem V. einfacher und prägnanter erscheinen als sonst übliche Σ -Zeichen.

Die übrigen Definitionen und Aussagen finden sich z.B. bei Bourbaki [66, Chap. II, §2] bzw. lassen sich ohne Schwierigkeiten beweisen.

Bemerkungen zu 1.2:

Vorläufer von P finden sich schon in der Arbeit von Agnew [37] (dort implizit in p^1) und später in einer Bemerkung von H. Günzler im ZBL 91, 102 und ZBL 100, 100. Für spätere Anwendungen besonders wichtig sind die Lemmata 6, 9, 10 (siehe auch Bsp. zu 1.2, 9L), die es gestatten, für gewisse $q \in Q$ mit Pq sogar schon das wichtigere und kompliziertere Rq (über $Rq = S_1 \cdot Pq!$) zu berechnen!

Eine charakteristische Eigenschaft von P ist in 12L formuliert. (siehe auch Laurent [72, S.378-383])

Bemerkungen zu 1.3:

Ein Vorläufer von S findet sich bei Agnew [37] (p^m im Falle " p pos.hom."). Die Operatoren $S_n (n \in \mathbb{N})$ sind "endliche Varianten" von S . Die im Vergleich zu Sq einfachere Art der Berechnung von $S_n q$ bzw. $S_n q$ gestattet in gewissen Fällen (siehe Beispiele !) mittels 1.32, 4Lc) bzw. 1.32, 5L Sq zu berechnen. In 1.31 erweist es sich zum ersten Mal als nützlich, $+\infty + (-\infty)$ bilden zu können (siehe 2L) und läuft darauf hinaus, daß Sq gemäß 1D "zerlegt" wird. In etwas allgemeinerem Zusammenhang tritt S mit 1.31, 11L-12L bei Moreau [70, S.127-129] auf. Eine charakteristische Eigenschaft von S ist in 1.31, 12L formuliert.

Bemerkungen zu 1.4:

Vorläufer von R finden sich bei Agnew [37] und besser noch

bei Simons [68, S.117] (dort $\hat{a}$; die Addition $+\infty+(-\infty)$ wird nicht als zulässig anerkannt und tritt dennoch auf!) Die $R_n (n \in \mathbb{N})$ sind "endliche Varianten" von R . Die wesentliche Eigenschaft von R ist in 1.41, 15L formuliert. In 1.4 erweist es sich als nützlich, in $\mathbb{R}$ multiplizieren zu können, um R bzw. $R_n (n \in \mathbb{N})$ einfach definieren zu können. Ohne unbeschränktes Rechnen in $\mathbb{R}$ wäre z.B. 1.41, 14L nur unter zusätzlichen Voraussetzungen gültig, die den Umgang mit R ziemlich schwerfällig machen würden. Dasselbe gilt für fast alle Ergebnisse in 1.4. Eine Aussage ähnlich 1.41, 9L, jedoch unter der zusätzlichen Voraussetzung " $p \in Q_4$ ", findet sich schon bei Simons [68, S.115]. Von besonderer Wichtigkeit sind 1.41, 7L-9L für den in der Einleitung (dieser Arbeit) erwähnten Formalismus, der allgemeiner Probleme auf die Grundprobleme zurückzuführen gestattet.

Bemerkungen zu 1.5:

F ist die auf Q erweiterte 2-stellige Konvolution (siehe Holmes [72, S.47]), $\hat{Q}$ die entsprechend erweiterte n -stellige Konvolution. $\hat{Q}$ wird meines Erachtens zuerst von Simons [68, S.115] im Zusammenhang mit dem Satz von Hahn-Banach verwendet. F fand der V. dann auch bei Moreau [70, S.130] (dort mit V bezeichnet!) sowie 1.51, 2L und Teile von 1.51, 3L. Die "schönen" Eigenschaften von F bzw. $\hat{Q}$ (siehe 1.51, 3L bzw. 1.52, 3L) bestätigen nur die Nützlichkeit, in $\mathbb{R}$ uneingeschränkt addieren und multiplizieren zu können.

Bemerkungen zu 1.6:

1.61, 1L-2L sind Verallgemeinerungen des Lemmas 2 bei Robertson [67, S.21]. 1.62, 11K ist eine Verallgemeinerung von $S7$, Th.a), Th.b) von Holmes [72]. Die (vom V. so genannte) "sublineare Ableitung $q^s(x_0, \cdot)$ " spielt eine wichtige Rolle für das Subdifferential $\partial q(x_0)$ (siehe 4.6!)

Bemerkungen zu 1.8:

Hier wird das (vom V. so genannte) obere Minkowski-Funktional eingeführt und einige Eigenschaften angegeben. Ein Vorläufer davon taucht bei Phelps [63] auf und bei Simons [68, K7]) in einem speziellen Problem.

Bemerkungen zu 1.9:

Siehe hierzu Köthe [66, S.41-45] !

1.01 Abkürzungen

Kürzel	Bedeutung
$:=$; $:\Leftrightarrow$	definitionsgemäß gleich bzw. äquivalent
$\wedge$; $\vee$; $\neg$; $\Rightarrow$; $\Leftrightarrow$	und; oder; nicht; wenn..., dann...; genau dann, wenn...
$\forall$; $\exists$; $\exists^!$; $\forall!$	für alle ; es gibt (wenigstens) ein(e, es) ; es gibt genau ein(e, es); Widerspruch!
pos.hom.	positiv homogen
subadd.	subadditiv
sublin.	sublinear
konv.	konvex
superadd.	superadditiv
VR ; l.s.	Vektorraum
absorb.	absorbierend
top.	topologisch
top.R	topologischer Raum
top.VR ;	topologischer Vektorraum(nicht unbedingt
absol.-konv.	Hausdorff'sch); absolut-konvex
Hausd.;kp.	Hausdorff'sch; kompakt
l.c.s.	lokalconvexer top.VR(<u>nicht unbedingt Hausd.</u>)
Vor.	Voraussetzung
Beh.; Ann.	Behauptung; Annahme
Bew.	Beweis
qed.	Beweis-Ende
Def.	Definition
stet.	stetig
uhstet.	unterhalbstetig
ohstet.	oberhalbstetig
$\mathcal{P}(X)$; $ I $	Potenzmenge von X; Kardinalzahl der Menge I
$\mathcal{U}(x)$	Umgebungsfilter von x (in top.R)
$\bar{A}$; $\overset{\circ}{A}$	abgeschlossene Hülle von A; offener Kern von A (dabei $A \subset X$ top.R)
G_A	Komplement von A (bzgl. $X \supset A$)
$f[A]$; $f _A$; $f _B$	Bild von A unter f; Einschränkung von f auf A; Urbild von B bzgl. f (dabei $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$)
$\overline{\mathbb{R}}$; $\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^+$	$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$; $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$; $\mathbb{R}^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
δ_K ; χ^X	Indikatorfunktion von K $\delta_K(x) := \begin{cases} 0 & (x \in K) \\ +\infty & (x \notin K) \end{cases}$ ($x \in X$) (dabei $K \subset X$ Menge); die Abbildung $X \rightarrow \{1\} \subset \mathbb{R}$

Kürzel	Bedeutung
$Q; Q(X)$	$Q := Q(X) := \overline{\mathbb{R}}^X$ (dabei X Menge)
$Q_1; Q_1(X)$	$Q_1 := Q_1(X) := \{q \in Q \mid q[X] \downarrow -\infty\}$
$Q_2; Q_2(X)$	$Q_2 := Q_2(X) := \{q \in Q \mid q[X] \uparrow +\infty\}$
$Q_0; Q_0(X)$	$Q_0 := Q_0(X) := \{q \in Q \mid q[X] \subset \mathbb{R}\}$
$\text{dom } q$	$\text{dom } q := \{x \in X \mid q(x) < +\infty\}$ (X VR über $\mathbb{R}$, $q \in Q$)
$\hat{h}$	$\hat{h} \in Q(X)$ def. durch $\hat{h}(x) := \begin{cases} h(x) & (x \in K) \\ +\infty & (x \in X \setminus K) \end{cases}$ (dabei sei X VR über $\mathbb{R}$, $h: K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $K \subset X$)
A absorb.	$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda A = X$
$\text{co}(A)$	konv. Hülle von A (X VR über $\mathbb{R}$, $A \subset X$)
$p_A; \bar{p}_A$	unteres bzw. oberes Minkowski-Funktional (siehe 1.7 bzw. 1.8)
$A[X; \langle A \rangle; X']$	A lin. Teilraum von X ; der von A erzeugte lin. Teilraum; Menge der lin. Funktionale auf X (dabei X VR über $\mathbb{R}$, $A \subset X$)
$X^{\#}; o^{\#}$	Menge der stetigen lin. Funktionale; Nullfunktional auf X (dabei X top. VR über $\mathbb{R}$)
$j; o'$	die Abbildung $X \rightarrow X$ mit $j(x) := -x$; Nullfunktional auf X (dabei X VR über $\mathbb{R}$)
$p \leq q; A \leq B$	siehe 1.03; $\forall q \in Q: Aq \leq Bq$ (wobei $A, B: Q \rightarrow Q$)
$\mathbb{R}^{m \times n}; A^*, A^T$	Menge der $m \times n$ -Matrizen mit reellen Elementen; transponierte Matrix ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$)
A°	Polare von A (siehe Schaefer [71, S.125])
f trennt M, N f trennt M, N strikt	$\sup f[M] \leq \inf f[N]$ $\sup f[M] < \inf f[N]$ (X top. VR über $\mathbb{R}$; $M, N \subset X$; $f \in X^{\#}$)
$P(y, x_0)$	$\underline{x_0} \neq 0: P(y, x_0)(x) := \begin{cases} \gamma \alpha (x = \alpha x_0, \alpha \in \mathbb{R}) \\ +\infty \text{ sonst} \end{cases}; \underline{x_0} = 0: P(y, x_0) := \delta_{\{0\}}$ (dabei $\gamma \in \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, X VR über $\mathbb{R}$)
T^*	Adjungierte von T (siehe Schaefer [71, S.155 ff.] dort "u" geschrieben)
$\text{cl}(q)$	uhstet. Hülle von q (siehe 1.9)
$f^{\#}; f^{**}$	Konjugierte von f ; zweite Konjugierte von f (siehe 1.10)
$\text{Im } T; \text{Ker } T;$ $D(T)$	Bild von T ; Kern von T ; Definitionsbereich von T

1.02 Der Raum $\overline{\mathbb{R}}$

1 Def.: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

2 Ordnung auf $\overline{\mathbb{R}}$: die übliche " $\leq$ "; dabei gilt:
 ($\overline{\mathbb{R}}, \leq$) vollständiger Verband;
 insbesondere $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$.

3 Addition auf $\overline{\mathbb{R}}$: wird mit folgender Verknüpfungstafel definiert (wobei $r_1, r_2 \in \overline{\mathbb{R}}$):

2.S. 1.S.	r_2	$+\infty$	$-\infty$
r_1	$r_1 + r_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Es gilt dabei:

- a) "+" kommutativ, assoziativ
- b) Neutralelement bzgl. "+" ist $0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (eindeutig bestimmt!)
- c) Def.: $-(-\infty) := +\infty$; $-(+\infty) := -\infty$
- d) Def.: $a-b := a+(-b)$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$)

also: $(\overline{\mathbb{R}}, +)$ kommutative Halbgruppe mit Null.

4 Multiplikation auf $\overline{\mathbb{R}}$: wird mit folgender Verknüpfungstafel definiert (wobei $r_1, r_2 \in \overline{\mathbb{R}}$):

2.F. 1.F.	$r_2 > 0$	$r_2 < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$r_1 > 0$	$r_1 \cdot r_2$	$r_1 \cdot r_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$r_1 < 0$	$r_1 \cdot r_2$	$r_1 \cdot r_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

Es gilt dabei:

- a) "·" kommutativ, assoziativ
 - b) Neutralelement bzgl. "·" ist $1 \in \overline{\mathbb{R}}$ (eindeutig bestimmt!)
 - c) $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}: -c = (-1) \cdot c$
- also: $(\overline{\mathbb{R}}, \cdot)$ kommutat. Halbgruppe mit Eins.

5 Distributivgesetze (abgeschwächte!):

- a) Gegenbeispiel: $(+\infty) \cdot (5 + (-5)) = 0 \neq +\infty = (+\infty) \cdot 5 + (+\infty) \cdot (-5)$;
 jedoch gilt:
- b) $\forall a \in \overline{\mathbb{R}} \forall b, c \in \overline{\mathbb{R}}: a(b+c) = ab+ac$
- c) $\forall a \in \overline{\mathbb{R}} \forall b, c \in \overline{\mathbb{R}}: b+c < \infty \Rightarrow a(b+c) = ab+ac$
- d) $\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} \forall c \in \overline{\mathbb{R}}: a(b+c) = ab+ac$
- e) $\forall a \in \overline{\mathbb{R}} \forall b, c \in \overline{\mathbb{R}}_0^+ \{+\infty\}: a(b+c) = ab+ac$

6 Verträglichkeit zwischen "+" und " $\leq$ "

Es gilt: a) $\forall a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}: a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$

b) $\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} \forall c \in \overline{\mathbb{R}}: a+b \geq c \Leftrightarrow a \geq c+(-b)$

c) $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \begin{cases} \inf(A+B) = \inf A + \inf B \\ \sup(A+B) = \sup A + \sup B \end{cases}$

7 Verträglichkeit zwischen "." und "≤":

Es gilt: a) $\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall c \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}: a \leq b \implies ac \leq bc$

b) $\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}}: a \leq b \implies -b \leq -a$

c) $\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall c \in (-\mathbb{R}_0^+) \cup \{-\infty\}: a \leq b \implies bc \leq ac$

d) $\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall c \in \mathbb{R}^+: a < b \implies ac < bc$

8 Inverses Element bzgl. "+": Es gilt:

$\forall a \in \overline{\mathbb{R}} ((\exists b \in \overline{\mathbb{R}} : a+b=0) \iff a \in \mathbb{R})$

9 Inverses Element bzgl. "·": Es gilt:

$\forall a \in \overline{\mathbb{R}} ((\exists b \in \overline{\mathbb{R}} : ab=1) \iff a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

10 Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$: siehe Köthe [66, S. 41]

1.03 Der Raum $Q(X)$

Allgemeine Vor.: X Menge

1 Def.: $Q(X) := \{q \mid q: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}\}$

2 Addition auf Q : Sei $p, q \in Q$

Def.: $p+q \in Q$ def. durch $x \mapsto p(x)+q(x) \quad (x \in X)$

Lemma: Vor.: $p, q, r \in Q$

Beh.: a) $p+q=q+p$

b) $(p+q)+r=p+(q+r)$

c) $0'+p=p$; $(\exists n \in Q \forall p \in Q: n+p=p)$

d) p hat Inverses bzgl. "+" $\Leftrightarrow p \in Q_0$.

3 Ordnung auf Q : Sei $p, q \in Q$; $A \subset X$

Def.: a) $p \leq q : \Leftrightarrow (\forall x \in X: p(x) \leq q(x))$

b) $p \leq_A q : \Leftrightarrow (\forall x \in A: p(x) \leq q(x))$

Lemma: Vor.: $p, q \in Q$

Beh.: $r \in Q \wedge p \leq q \Rightarrow p+r \leq q+r$

4 Multiplikation auf Q : Sei $p, q \in Q$; $c \in \overline{\mathbb{R}}$

Def.: a) $cq \in Q$ def. durch $x \mapsto cq(x) \quad (x \in X)$

b) $pq \in Q$ def. durch $x \mapsto p(x)q(x) \quad (x \in X)$

c) $-q := (-1)q$

Lemma: Vor.: $p, q, r \in Q$; $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Beh.: a) $a(pq) = (ap)q = p(aq)$

b) $(ab)p = a(bp)$

c) $p \leq q \wedge a \geq 0 \Rightarrow ap \leq aq$

(hier: $0': X \rightarrow \{0\}$) d) $p \leq q \wedge r \geq 0' \Rightarrow rp \leq rq$

5 Def.: Vor.: X VR über $\overline{\mathbb{R}}$, $q \in Q$

a) q pos.hom. : $\Leftrightarrow \forall x \in X \forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}^+: q(\alpha x) = \alpha q(x)$

b) q subadd. : $\Leftrightarrow \forall x, y \in X: q(x+y) \leq q(x)+q(y)$

c) q sublin. : $\Leftrightarrow q$ pos.hom., subadd.

d) q konv. : $\Leftrightarrow \forall x, y \in X \forall \alpha \in [0, 1]: q(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha q(x) + (1-\alpha)q(y)$

e) q superadd. : $\Leftrightarrow (-q)$ subadd.

1.1 Kegel

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1. Sei I Menge mit $|I| < \infty$

a) $t \in \mathbb{R}^I, x \in X^I$

Def.: $tx := \sum_{i \in I} t_i x_i$ (wobei $t_i := t(i), x_i := x(i), I = \emptyset \Rightarrow tx = 0$)

b) $t \in \mathbb{R}^I, u \in \mathbb{R}^I$

Def.: $tu := \sum_{i \in I} t_i u_i$ (wobei $I = \emptyset \Rightarrow tu = 0 \in \mathbb{R}$) (siehe 1.02)

2. Sei $C \subset X, U \subset X$

Def.: a) C Kegel (mit Scheitel o) : $\Leftrightarrow \mathbb{R}^+ C \subset C$

b) C konv. Kegel : $\Leftrightarrow (o \in C, \mathbb{R}^+ C \subset C, C \text{ konv.})$

c) $D_1(U)$ ("der von U erzeugte Kegel") : $= \bigcap_{\substack{U \subset A \supset o \\ A \text{ Kegel}}} A$

d) $D_2(U) := \bigcap_{\substack{U \subset A \supset o \\ A \text{ konv.}}} A$

e) $C(U)$ ("der von U erzeugte konv. Kegel") : $= \bigcap_{\substack{U \subset A \supset o \\ A \text{ konv.}}} A$

3 Lemma: Vor.: $U \subset X$

Beh.: a) $D_1(U)$ kleinste Menge A mit:

$$\mathbb{R}^+ A \subset A, U \subset A \subset X; D_1(U) = \bigcup_{A \in \mathcal{D}_1} A = \mathbb{R}^+ U$$

b) $D_2(U)$ kleinste Menge A mit:

$$U \subset A \subset X, o \in A, A + A \subset A;$$

$$D_2(U) = \{ \sum_{i \in I} t_i x_i \mid |I| < \infty, x_i \in U, t_i \geq 0 \}$$

c) $C(U)$ kleinste Menge A mit:

$$U \subset A \subset X, o \in A \text{ konv.}, \mathbb{R}^+ A \subset A;$$

$$C(U) = \{ tx \mid |I| < \infty, t_i \in \mathbb{R}^+, x_i \in U \}$$

d) $D_2(U) = C(U)$

e) $U \neq \emptyset$ konv. $\Rightarrow C(U) = \mathbb{R}^+ U$

f) U Kegel $\Rightarrow (U + U \subset U \Leftrightarrow U \text{ konv.})$

4 Lemma: Vor.: $\emptyset \neq C \subset X$ Kegel, C konv., $\dim \langle C \rangle < \infty$

Beh.: $\exists x_o \in C \cup \{o\} : \langle C \rangle = C - C(\{x_o\}) = C + \langle \{x_o\} \rangle$

5 Lemma: Vor.: $C \subset X$ Kegel, C konv., $\exists A \subset C(\langle C \rangle = C + A, \dim \langle A \rangle < \infty)$

Beh.: $\exists x_o \in C \cup \{o\} : \langle C \rangle = C - C(\{x_o\})$

1.2 Der Operator P

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Def.: $P: Q \rightarrow Q$, def. durch $Pq(x) := \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} \cdot q(\alpha x)$ ($q \in Q$)

2 Lemma: $\text{dom } Pq = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha \cdot \text{dom } q = D_+(\text{dom } q)$

3 Lemma: a) $q \in Q \Rightarrow Pq$ pos.hom.

b) $\forall q \in Q: Pq \leq q$

c) $p, q \in Q: p \leq q \Rightarrow Pp \leq Pq$

d) $p \in Q$ pos.hom., $q \in Q: p \leq q \Rightarrow p \leq Pq$

e) $p \in Q$ pos.hom., $q \in Q \Rightarrow P(p+q) = p+Pq$

f) $q \in Q \Rightarrow (q \text{ pos.hom.} \Leftrightarrow Pq=q)$

g) $P \circ P = P$

4 Lemma: Vor.: $q \in Q$

Beh.: a) $q(0) < 0 \Leftrightarrow Pq(0) = -\infty$

b) $\infty > q(0) \geq 0 \Leftrightarrow Pq(0) = 0 \Leftrightarrow Pq(0) \in \mathbb{R}$

5 Lemma: Vor.: $q \in Q_+$

Beh.: Pq subadd. $\Rightarrow \begin{cases} \forall x, y \in \text{dom } q \forall \alpha, \beta, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \gamma \in \mathbb{R}^+ : \\ q(\gamma \alpha x + \gamma \beta y) \leq \gamma \cdot (\varepsilon + \alpha q(x) + \beta q(y)) \end{cases}$

6 Lemma: Vor.: $q \in Q: \forall x, y \in \text{dom } q \forall \alpha, \beta, \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0: q(\gamma \alpha x + \gamma \beta y) \leq \gamma \cdot (\alpha q(x) + \beta q(y) + \varepsilon)$

Beh.: Pq subadd.

7 Lemma: Vor.: $q \in Q$

Beh.: a) $Pq^{-1} [[-\infty, 1]] = \bigcup_{\alpha > 0} \bigcup_{x \in \text{dom } q} \{x \mid q(\alpha x) \leq (1 + \varepsilon) \cdot \alpha\}$

b) $Pq^{-1} [[-1, \infty]] = \bigcap_{\alpha > 0} \{x \mid q(\alpha x) \geq -\alpha\}$

8 Lemma: Vor.: $q \in Q, 0 \leq q(0)$

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom } q \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} (\begin{smallmatrix} \alpha_1 q(x_1) < k_1 \\ \alpha_2 q(x_2) < k_2 \end{smallmatrix}) \exists \gamma \in \mathbb{R}^+$

$:\frac{1}{\gamma} \cdot q(\gamma(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) < k_1 + k_2$

Beh.: $\forall x \in \text{dom } Pq \wedge (-\text{dom } Pq) : Pq(x), Pq(-x) \in \mathbb{R}$

9 Lemma: Vor.: $q \in Q$

Beh.: d) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ Pq subadd.

wobei

a) $\forall x, y \in \text{dom } q \forall \alpha, \beta, \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0: q(\gamma \alpha x + \gamma \beta y) \leq \gamma(\varepsilon + \alpha q(x) + \beta q(y))$

b) $\forall x, y \in \text{dom } q \forall \alpha, \beta > 0 \exists \gamma > 0: q(\gamma \alpha x + \gamma \beta y) \leq \gamma \alpha q(x) + \gamma \beta q(y)$

c) $\forall x, y \in \text{dom } q \exists \mu > 0 \forall s, t > 0: s+t=\mu: q(sx+ty) \leq sq(x)+tq(y)$

d) q konv.

10 Lemma: Vor.: $q \in Q$

Beh.: Pq subadd. $\Leftarrow \Rightarrow$

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom } q \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \left(\begin{matrix} \alpha_1 q(x_1) < k_1 \\ \alpha_2 q(x_2) < k_2 \end{matrix} \right) \exists \gamma \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{1}{\gamma} q(\gamma \alpha_1 x_1 + \gamma \alpha_2 x_2) < k_1 + k_2$$

11 Lemma: Vor.: $(q_\iota)_{\iota \in I}$ Familie aus $Q: \forall \iota \in I: q_\iota \text{ pos. hom.}$

Beh.: $\sup_{\iota \in I} q_\iota, \inf_{\iota \in I} q_\iota \text{ pos. hom.}$ (Bew. klar!)

12 Lemma: Vor.: $q \in Q$

Beh.: $Pq = \sup \{ p \in Q \mid p \text{ pos. hom.} \wedge p \leq q \}$

Beweise

Bew. 2L: $\text{dom } Pq = \{x \mid \exists \alpha > 0: \alpha x \in \text{dom } q\} = \bigcup_{\beta > 0} \text{dom } q$

Bew. 3L: d) $p \leq q \Rightarrow Pp \leq Pq, Pp = p \Rightarrow p \leq Pq$

Bew. 3L: e) 1. Fall: $\exists \alpha > 0: \alpha x \in \text{dom } p \cap \text{dom } q \Rightarrow x \in \text{dom } p \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(p+q)(x) = \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} \cdot ((p+q)(\alpha x)) = \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} \cdot (p(\alpha x) + q(\alpha x)) =$
 $= \inf_{\alpha > 0} (p(x) + \frac{1}{\alpha} q(\alpha x)) = p(x) + \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} q(\alpha x) = p(x) + Pq(x) = (p+Pq)(x)$

2. Fall: $\forall \alpha > 0: \alpha x \notin \text{dom } p \cap \text{dom } q: P(p+q)(x) = +\infty$
 $(p+Pq)(x) = +\infty$, denn in

beiden Fällen gilt: $\text{dom } (p+Pq) = \text{dom } P(p+q) = \bigcup_{\beta > 0} \text{dom } p \cap \text{dom } q$
 $= (\bigcup_{\beta > 0} \text{dom } q) \cap \text{dom } p$

Bew. 5L: Sei $x, y \in \text{dom } q, \alpha, \beta, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \alpha x, \beta y \in \text{dom } Pq \stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \alpha x + \beta y \in \text{dom } Pq \Rightarrow$
 $Pq(\alpha x + \beta y) \leq Pq(\alpha x) + Pq(\beta y) \leq \alpha q(x) + \beta q(y) \in \mathbb{R}$

1. Fall: $Pq(\alpha x + \beta y) = -\infty \Rightarrow \exists \gamma > 0: \frac{1}{\gamma} q(\gamma \alpha x + \gamma \beta y) \leq \varepsilon + \alpha q(x) + \beta q(y)$

2. Fall: $Pq(\alpha x + \beta y) > -\infty \Rightarrow Pq(\alpha x + \beta y) \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\exists \gamma > 0 : Pq(\alpha x + \beta y) + \varepsilon) \leq \frac{1}{\gamma} q(\gamma \alpha x + \gamma \beta y) \Rightarrow \frac{1}{\gamma} \cdot q(\gamma \alpha x + \gamma \beta y) - \varepsilon \leq \alpha q(x) + \beta q(y) .$$

Bew. 6L: $x, y \in \text{dom } Pq$ 1. Fall: $Pq(x) = -\infty \vee Pq(y) = -\infty$

$\text{oBdA } Pq(x) = -\infty$, nun: $\exists \beta > 0 : \beta q(\frac{y}{\beta}) < \infty$;

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni K < \infty &\Rightarrow (\exists \alpha_K > 0 : \alpha_K q(\frac{x}{\alpha_K}) < K - \beta q(\frac{y}{\beta}) - 1) , \varepsilon := 1 \\ \stackrel{\text{vor.}}{\Rightarrow} \exists \gamma > 0 : q(\gamma x + \gamma y) &\leq \gamma(1 + \alpha_K q(\frac{x}{\alpha_K}) + \beta q(\frac{y}{\beta})) \Rightarrow \frac{1}{\gamma} q(\gamma(x+y)) < K \Rightarrow \\ Pq(x+y) &= -\infty . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. Fall: } Pq(x), Pq(y) \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha_\varepsilon > 0 : Pq(x) + \varepsilon > \alpha_\varepsilon q(\frac{x}{\alpha_\varepsilon}) \\ \exists \beta_\varepsilon > 0 : Pq(y) + \varepsilon > \beta_\varepsilon q(\frac{y}{\beta_\varepsilon}) \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow Pq(x) + Pq(y) + 2\varepsilon > \alpha_\varepsilon q(\frac{x}{\alpha_\varepsilon}) + \beta_\varepsilon q(\frac{y}{\beta_\varepsilon}) &\stackrel{\text{vor.}}{\Rightarrow} \exists \gamma > 0 : \frac{1}{\gamma} q(\gamma x + \gamma y) \leq \varepsilon + \\ + \alpha_\varepsilon q(\frac{x}{\alpha_\varepsilon}) + \beta_\varepsilon q(\frac{y}{\beta_\varepsilon}) &\leq 3\varepsilon + Pq(x) + Pq(y) \Rightarrow Pq(x+y) \leq 3\varepsilon + Pq(x) + Pq(y) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bew. 7L: Zu a) } x \in (Pq)^{-1} \left[[-\infty, 1] \right] &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 : \frac{1}{\alpha} q(\alpha x) \leq 1 + \varepsilon) \\ \text{Zu b) } x \in (Pq)^{-1} \left[[-1, \infty] \right] &\Leftrightarrow (\forall \alpha > 0 : q(\alpha x) \geq -\alpha) \end{aligned}$$

Bew. 8L: Nach 1oL: Pq subadd., $Pq(o) \geq o \Rightarrow o \leq Pq(o) \leq Pq(x) + Pq(-x) \stackrel{\text{vor.}}{\Rightarrow} Pq(x), Pq(-x) \in \mathbb{R}$.

Bew. 9L: c) $\Rightarrow$ b): $x, y \in \text{dom } q, \alpha, \beta > 0 \Rightarrow (\exists \mu > 0 \forall s, t > 0 : s+t = \mu \Rightarrow q(sx+ty) \leq sq(x)+tq(y))$, $\gamma := \frac{\mu}{\alpha+\beta} \Rightarrow \gamma\alpha + \gamma\beta = \mu \Rightarrow q(\gamma\alpha x + \gamma\beta y) \leq \gamma\alpha q(x) + \gamma\beta q(y)$.

Bew. 1oL: $\Rightarrow$: $x_1, x_2 \in \text{dom } q; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+; K_1, K_2 \in \mathbb{R} : \alpha_1 q(x_1) < K_1, \alpha_2 q(x_2) < K_2 \Rightarrow (Pq(\alpha_1 x_1) < K_1, Pq(\alpha_2 x_2) < K_2) \Rightarrow Pq(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < K_1 + K_2 \Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}^+ : \frac{1}{\gamma} q(\gamma(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) < K_1 + K_2$.

Bew. $\Leftarrow$: $\text{oBdA } y_1, y_2 \in \text{dom } Pq$; sei $Pq(y_1) < K_1, Pq(y_2) < K_2 \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \alpha_1 q(\frac{y_1}{\alpha_1}) < K_1, \alpha_2 q(\frac{y_2}{\alpha_2}) < K_2$, sei $x_1 := \frac{y_1}{\alpha_1}, x_2 := \frac{y_2}{\alpha_2}$, also $x_1, x_2 \in \text{dom } q \Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}^+ : \frac{1}{\gamma} q(\gamma(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = \frac{1}{\gamma} q(\gamma(y_1 + y_2)) < K_1 + K_2 \Rightarrow Pq(y_1 + y_2) < K_1 + K_2$, also: $Pq(y_1 + y_2) \leq Pq(y_1) + Pq(y_2)$ qed.

Bew. 12L: $p \in Q$ pos.hom. $p \leq q \stackrel{3a}{\Rightarrow} p \leq Pq \Rightarrow$

$p_o := \sup \{ p \in Q \mid p \text{ pos.hom.} \wedge p \leq q \} \leq Pq$; weiter $(\exists ab) : Pq \leq q \wedge Pq \text{ pos.hom.} \Rightarrow Pq \leq p_o$ qed.

Beispiele zu 1.2, 9L

1. Bsp.: Sei $q: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $q(x) := \begin{cases} -\infty & (x \text{ irrat.}) \\ 0 & (x \text{ rat.}) \end{cases}$

Beh.: Pq subadd., aber: q erfüllt nicht 9L a).

Bew.: $\forall x \in \mathbb{R} \exists \alpha > 0: \frac{1}{\alpha} q(\alpha x) = -\infty$, also: $(\forall x \in \mathbb{R}: Pq(x) = -\infty)$

aber: Sei $x = -y = \sqrt{2}$ $\left. \begin{matrix} \alpha = \beta = 1 = \varepsilon \end{matrix} \right\} \Rightarrow q(x) = q(y) = -\infty$ Ann.:

$(\exists \gamma > 0: \frac{1}{\gamma} q(\gamma(\alpha x + \beta y)) \leq \varepsilon + \alpha q(x) + \beta q(y)) \Rightarrow \frac{1}{\gamma} q(0) \leq 1 + (-\infty) = -\infty$
 $\Rightarrow 0 \leq -\infty$ W!

2. Bsp.: Sei $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $q(x) := 1 + \sin x$

Beh.: q erfüllt a), aber nicht b).

Zu a): $x, y; \alpha, \beta, \varepsilon > 0; \frac{1 + \sin((\alpha x + \beta y)\gamma)}{\gamma} \leq \varepsilon + \alpha(1 + \sin x) +$

$+\beta(1 + \sin y)$. Ein $\gamma > 0$ mit der gewünschten Eigenschaft a) existiert immer ($\gamma \rightarrow +\infty$)

Zu b): $x := -\frac{\pi}{2}, y := \frac{3\pi}{2} \Rightarrow (x \neq y, \sin x = \sin y = -1)$, Ann.:

b) erfüllt: $\Rightarrow (\exists \gamma > 0: \frac{1 + \sin \gamma(\alpha x + \beta y)}{\gamma} \leq \alpha(1 + \sin x) + \beta(1 + \sin y))$
 $\Rightarrow \frac{1}{\gamma} < 0$ W!

3. Bsp.: Sei $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $q(x) := \sqrt{|x|}$

Beh.: q erfüllt b), aber nicht c).

Zu b): $x, y \in \mathbb{R}, \alpha, \beta > 0$; zu zeigen: $\frac{\sqrt{\gamma} \cdot \sqrt{|\alpha x + \beta y|}}{\gamma} \leq \alpha \sqrt{|x|} + \beta \sqrt{|y|}$ für ein $\gamma > 0$.

1. Fall: $x = 0 \vee y = 0$ klar! 2. Fall: $x \neq 0 \vee y \neq 0$ klar! ($\gamma \rightarrow +\infty$!)

Zu c): $x := 0, y := 1 \Rightarrow q(x) = 0, q(y) = 1$; Ann.: $(\exists \mu > 0 \forall t \in]0, \mu[: q(t) \leq t) \Rightarrow (\forall t \in]0, \mu[: 1 \leq \sqrt{t})$ W!

4. Bsp.: Sei $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $q(x) := \begin{cases} x^2 & (|x| \leq 1) \\ 1 + \frac{1}{x} & (|x| > 1) \end{cases}$

Beh.: q erfüllt c), aber nicht d).

Zu c): 1. Fall: $x, y \neq 0 \Rightarrow 0 < q(x), q(y)$; oBdA $0 < q(x) \leq q(y)$.

Nun: $\exists \tau > 0 \forall \alpha \in [0, 1]: \tau(\alpha x + (1-\alpha)y) \in [-1, 1]$, weiter:

$\forall \lambda \in]0, 1[\forall \alpha \in [0, 1]: \frac{1}{\lambda} q(\lambda \tau(\alpha x + (1-\alpha)y)) = \frac{1}{\lambda} \lambda^2 \tau^2(\alpha x + (1-\alpha)y)^2 \leq \lambda$,

also: $(\exists \lambda \in]0, 1[: \frac{\lambda}{\tau} \leq q(x))$, somit: $\alpha \in [0, 1] \Rightarrow$

$\frac{1}{\lambda \tau} \cdot q(\lambda \tau(\alpha x + (1-\alpha)y)) \leq \frac{\lambda}{\tau} \leq q(x) \leq \alpha q(x) + (1-\alpha)q(y)$, also: Wähle $\mu := \lambda \cdot \tau$

2. Fall: $\left. \begin{array}{l} x=0, y=0 \\ \neg(x=y=0) \end{array} \right\}$ oBdA $x=0, y \neq 0$, zu zeigen:

$\exists \mu > 0 \forall t \in]0, \mu[: q(ty) \leq tq(y)$; nun: $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \cdot q(ty) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \cdot t^2 \cdot y^2 = 0 <$
 $< q(y)$ qed.

3. Fall: $x=y=0 : \mu := 1$

"q nicht konvex" ist trivial!

1.34 Der Operator S

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Def.: $S:Q \rightarrow Q$, def. durch

$$Sq(z) := \begin{cases} \inf \{ 1^I \cdot (q \circ x) \mid \|I\| < \infty, x \in (\text{dom } q)^I, 1^I \cdot x = z \} & (z \in D_2(\text{dom } q)) \\ +\infty & (z \notin D_2(\text{dom } q)) \end{cases}$$

2 Lemma: $\forall z \in X: Sq(z) = \inf \{ 1^I \cdot (q \circ x) \mid \|I\| < \infty, x \in X^I, 1^I \cdot x = z \}$,
 $\text{dom } Sq = D_2(\text{dom } q)$

- 3 Lemma:
- a) $q \in Q \Rightarrow Sq \text{ subadd.} \wedge Sq(o) \leq o$
 - b) $q \in Q \Rightarrow Sq \leq q$
 - c) $p, q \in Q: p \leq q \Rightarrow Sp \leq Sq$
 - d) $p \in Q \text{ subadd.}, p(o) \leq o, p \leq q \in Q \Rightarrow p \leq Sq$
 - e) $p \in Q \text{ subadd.}, p(o) \leq o, q \in Q \Rightarrow S(p+q) \geq p+Sq$
 - f) $q \in Q \Rightarrow (q \text{ subadd.}, q(o) \leq o) \Leftrightarrow Sq = q$
 - g) $S \circ S = S$; $q \in Q, \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow S(\alpha q) = \alpha(Sq)$

- 4 Lemma: Vor.: $q \in Q$
Beh.: a) $q \text{ subadd.} \Rightarrow Sq(x) = \begin{cases} q(x) & (x \neq o) \\ \min(o, q(o)) & (x = o) \end{cases}$
 b) $Sq(o) < o \Leftrightarrow Sq(o) = -\infty$
 c) $Sq(o) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Sq(o) \geq o \Leftrightarrow Sq(o) = o$

- 5 Lemma: Vor.: $q \in Q: q \text{ pos.hom.}$
Beh.: $Sq \text{ pos.hom.}$

- 6 Lemma: Vor.: $q \in Q$
Beh.: $q \text{ pos.hom.}, \text{ subadd.}, q(o) \leq o \Rightarrow Spq = q$

- 7 Lemma: Vor.: $q \in Q, p \in Q \text{ superadd.}, \text{ dom } Sq \subset \text{dom}(p)$
Beh.: $S(p+q) \leq p+Sq$

- 8 Lemma: Vor.: $q \in Q, \exists x_o \in \text{dom } q \cap (-\text{dom } q): q(x_o) + q(-x_o) < o$
Beh.: $\forall x \in \text{dom } q: Sq(x) = -\infty$

9 Lemma: Vor.: $q \in Q_0$

Beh.: $0 \geq Sq + S(-q)$

10 Lemma: Vor.: $p, q \in Q$

Beh.: $S(p+q) \geq Sp + Sq$

11 Lemma: Vor.: $(q_i)_{i \in I}$ Familie aus Q ($\forall i \in I: q_i \text{ subadd.}$)

Beh.: $\sup_{i \in I} q_i \text{ subadd.}$

12 Lemma: Vor.: $q \in Q$

Beh.: $Sq = \sup \{ p \in Q \mid p(0) \leq 0, p \text{ subadd.}, p \leq q \}$

13 Lemma: Vor.: $q \in Q: q[X] \neq +\infty, q \text{ subadd.}$

Beh.: $q(0) \geq 0 \iff (\exists x_0 \in X: q(x_0) > -\infty) \iff q[X] \subset \mathbb{R}$

Beweise

Bew.: 3L: a) Sei $x, y \in \text{dom } Sq = D_2(\text{dom } q)$ 1. Fall: $Sq(x) = -\infty$ $\vee Sq(y) = -\infty$

$0 \text{ Bda } Sq(x) = -\infty$ Nun: $K \in \mathbb{R}, K < 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \exists s \in (\text{dom } q)^I: |I| < \infty, x = 1 \cdot s, \\ 1 \cdot (q \circ s) < K \end{array} \right.$

weiter: $\left\{ \begin{array}{l} \exists t \in (\text{dom } q)^J: |J| < \infty, y = 1 \cdot t, \\ 1 \cdot (q \circ t) < \begin{cases} K & (\text{falls } Sq(y) = -\infty) \\ Sq(y) + 1 & (\text{falls } Sq(y) \in \mathbb{R}) \end{cases} \\ \bigcap I = \emptyset \end{array} \right\} \implies$

$\implies \left\{ \begin{array}{l} x+y = 1 \cdot s + 1 \cdot t \in \text{dom } Sq \\ 1 \cdot (q \circ s) + 1 \cdot (q \circ t) \leq \begin{cases} 2K \\ K+1+Sq(y) \end{cases} \text{ bzw. } \end{array} \right\} \implies Sq(x+y) \leq \begin{cases} 2K \\ K+1+Sq(y) \end{cases}$

$\implies Sq(x+y) = -\infty$ qed.

2. Fall: $Sq(x), Sq(y) \in \mathbb{R}: \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \implies$

$\implies \left\{ \begin{array}{l} \exists s \in (\text{dom } q)^I: |I| < \infty, 1 \cdot s = x, Sq(x) + \varepsilon > 1 \cdot (q \circ s) \\ \exists t \in (\text{dom } q)^J: |J| < \infty, 1 \cdot t = y, Sq(y) + \varepsilon > 1 \cdot (q \circ t) \end{array} \right. \text{ mit } \bigcap I = \emptyset \text{ oBda}$

$\implies \left\{ \begin{array}{l} x+y = 1 \cdot s + 1 \cdot t \in \text{dom } Sq \\ Sq(x+y) \leq 1 \cdot (q \circ s) + 1 \cdot (q \circ t) \leq 2\varepsilon + Sq(x) + Sq(y) \end{array} \right. \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \text{Beh.}$

Bew. 3L: d) $p \leq q, p(o) \leq o \xRightarrow{c)} Sp = p \leq Sq$

Bew. 3L: e) $\text{oBdA } x_o \in D_2(\text{dom } q \wedge \text{dom } p) \subset \text{dom } p \wedge \text{dom } Sq,$
 $S(p+q)(x_o) = \inf \left\{ 1^I \cdot ((p+q) \circ s) \mid |I| < \infty, 1^I \cdot s = x_o, s \in (\text{dom } p \wedge \text{dom } q)^I \right\} \geq$
 $\geq \inf \left\{ p(x_o) + 1^I \cdot (q \circ s) \mid |I| < \infty, 1^I \cdot s = x_o, s \in (\text{dom } p \wedge \text{dom } q)^I \right\} \stackrel{1.02}{=} p(x_o) + Sq(x_o) \quad \text{qed.}$

Bew. 3L: f) $\Rightarrow : q \text{ subadd.}, x_o \in \text{dom } q = \text{dom } Sq \Rightarrow Sq(x_o) \geq q(x_o) \Rightarrow Sq = q$

$\Leftarrow : Sq = q \stackrel{a)}{\Rightarrow} q \text{ subadd.}$

Bew. 4L: b) $\Rightarrow : (Sq(o) =: d < o, o \in \text{dom } Sq) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} : d = Sq(o) \leq \\ \leq nSq(o) = nd \end{array} \right.$
 $\Rightarrow d = -\infty$

Bew. 5L: $\text{oBdA } x_o \in D_2(\text{dom } q), \alpha \in \mathbb{R}^+ \xRightarrow{\text{ver}} \alpha x_o \in D_2(\text{dom } q) = C(\text{dom } q)$
 $Sq(\alpha x_o) = \inf \left\{ 1^I \cdot (q \circ s) \mid |I| < \infty, 1^I \cdot s = \alpha x_o, s \in (\text{dom } q)^I \right\} =$
 $= \inf \left\{ 1^I \cdot (q \circ (\alpha s)) \mid 1^I \cdot s = x_o, |I| < \infty, s \in (\text{dom } q)^I \right\} = \alpha Sq(x_o)$

Bew. 6L: $\Rightarrow : Pq = q, q(o) \leq o \Rightarrow SPq = Pq = q$

Bew. 7L: $x \in D_2(\text{dom } q) \wedge S(p+q)(x) > -\infty : \text{Sei } s \in (\text{dom } q)^I : (|I| < \infty, 1^I \cdot s = x) \xRightarrow{\text{ver}} S(p+q)(x) \leq 1^I \cdot ((p+q) \circ s) = 1^I \cdot (p \circ s) + 1^I \cdot (q \circ s) \stackrel{1.02, 5.0}{\leq} p(x) + 1^I \cdot (q \circ s)$
 $\Rightarrow S(p+q)(x) \leq p(x) + Sq(x) \quad \text{qed.}$

Bew. 8L: $x \in \text{dom } q \Rightarrow x = x + \sum_{i=1}^n x_o + \sum_{i=1}^n -x_o \Rightarrow Sq(x) \leq q(x) + n(q(x_o) + q(-x_o)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Sq(x) = -\infty$

Bew. 9L: $o' = q + (-q) \stackrel{10L}{\Rightarrow} o' = S(o') \geq Sq + S(-q)$

Bew. 10L: $p, q \in Q \Rightarrow Sp + Sq \leq S(Sp+q) \stackrel{3L}{\leq} S(p+q)$

Bew. 11L: $x, y \in X \Rightarrow (\sup q_i)(x+y) = \sup q_i(x+y) \leq \sup (q_i(x) + q_i(y)) \leq \sup q_i(x) + \sup q_i(y) \quad \text{qed.}$

Bew. 12L: $p \in Q : p(o) \leq o, p \text{ subadd.}, p \leq q \stackrel{3L}{\Rightarrow} p \leq Sq, \text{ also:}$
 $P_o := \sup \{ p \in Q \mid p(o) \leq o, p \text{ subadd.}, p \leq q \} \leq Sq; \text{ weiter (3Lab):}$
 $Sq(o) \leq o, Sq \text{ subadd.}, Sq \leq q \Rightarrow Sq \leq P_o \quad \text{qed.}$

Bew. 13L: $\exists x_o \in X : q(x_o) > -\infty, \text{ also } x \in X \Rightarrow q(x) + q(x_o - x) \geq q(x_o) > -\infty \xRightarrow{\text{ver}} q(x) \in \mathbb{R}, \text{ somit } q[X] \subset \mathbb{R}; \text{ Ann.: } q(o) < o \Rightarrow$
 $\stackrel{9L, 11L}{\Rightarrow} Sq(o) = q(o) = -\infty \text{ W! (wegen } q[X] \subset \mathbb{R})$

1.32 Die Operatoren S_n ($n \in \mathbb{N}$)

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Def.: Sei $n \in \mathbb{N}$

$S_n: Q \rightarrow Q$, def. durch

$$S_n q(z) := \inf \{ 1^I \cdot (q \cdot x) \mid |I| \leq n, x \in X^I, 1^I \cdot x = z \} \quad (q \in Q)$$

2 Lemma: Vor.: $n \in \mathbb{N}$

Beh.: a) $q \in Q \implies S_n q \leq q$

b) $p, q \in Q: p \leq q \implies S_n p \leq S_n q$

c) $S_n q(o) \leq o$

d) $S_1 q(z) = \begin{cases} \min(o, q(o)) & (z=o) \\ q(z) & (z \neq o) \end{cases} \quad (q \in Q)$

3 Lemma: Vor.: $q \in Q$

Beh.: a) $n \geq m, n, m \in \mathbb{N} \implies Sq \leq S_n q \leq S_m q$

b) $x \in X \implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n q(x) = Sq(x)$

c) $SS_n = S_n S = S \quad (n \in \mathbb{N})$

d) $S_n q$ subadd. $\iff Sq = S_n q$

e) $(q \text{ subadd.}, q(o) \leq o) \iff S_2 q = q$

f) $(\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \geq 2, S_{n_0} q = q) \iff (q \text{ subadd.}, q(o) \leq o)$

g) $q \text{ pos. hom.} \implies S_n q \text{ pos. hom.} \quad (n \in \mathbb{N})$

$q \text{ subadd.} \implies S_n q \text{ subadd.} \quad (n \in \mathbb{N})$

h) $S_2 \circ S_1 = S_2$

4 Lemma: Beh.: a) $S_{n+1} \geq S_2 \circ S_n \quad (n \in \mathbb{N})$

b) $S_{n+1} \geq S_2^n \quad (n \in \mathbb{N})$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_2^n q = Sq \quad (q \in Q)$

d) $S_2 \circ S_n \geq S_{2n} \quad (n \in \mathbb{N})$

5 Lemma: Vor.: $q \in Q, n \in \mathbb{N}$

Beh.: $Sq = S_n q \iff S_{n+1} q = S_n q$

Beweise

Bew. 3L: b) $(K \in \mathbb{R} : K > Sq(x) \implies (\exists n_0 : K > S_{n_0} q(x)) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n q(x) < K)$
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n q \leq Sq \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n q \implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n q = Sq$

Bew. 3L: c) $S_n \leq I \implies SS_n \leq SI = S \quad (\text{hier: } I \text{ Identität } Q \rightarrow Q)$
 $S \leq S_n \implies S = SS \leq SS_n \implies (S = SS_n, S_n S = S) \implies$

$$\Rightarrow S = S_n \circ S = S S_n$$

Bew. 3L: d) $\Rightarrow : S_n q$ subadd. $\stackrel{c)}{\Rightarrow} S S_n q = S q = S_n q$

Bew. 3L: e) $\leq : S_2 q(o) = q(o) \leq o, q(x_1 + x_2) = S_2 q(x_1 + x_2) \leq q(x_1) + q(x_2)$

Bew. 3L: f) $S_n q \leq S_2 q \leq q \Rightarrow S_2 q = q \stackrel{e)}{\Rightarrow} \text{Beh.}$

Bew. 3L: g) q subadd., $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (S q = S_1 q, S_n q = S_1 q) \Rightarrow S_n q = S q \Rightarrow \text{Beh.}$

Bew. 3L: h) Fall: $q(o) > o$: $\Rightarrow S_1 q(z) = \begin{cases} q(z) & (z \neq o) \\ o & (z = o) \end{cases};$
 $|I| \leq 2, x \in X^I, 1 \cdot x = z \Rightarrow (\exists I' \subset I : 1 \cdot (S_1 q \circ x) = 1 \cdot (q \circ x') \geq S_2 q(z)),$
wobei $I' := \{i \in I \mid x_i \neq o\}, x' := x|_{I'}$
 $\Rightarrow S_2 \circ S_1 q(z) \geq S_2 q(z) \Rightarrow S_2 S_1 q \geq S_2 q \geq S_2 S_1 q \Rightarrow S_2 S_1 q = q.$

Fall: $q(o) \leq o$: $\Rightarrow S_1 q = q \Rightarrow S_2 S_1 q = S_2 q$

Bew. 4L: a) Sei $|I| \leq n+1, x \in X^I, 1 \cdot x = z \Rightarrow 1 \cdot (q \circ x) = 1 \cdot (q \circ x') + q(x_{n_0}) = S_n q(1 \cdot x') + S_n q(x_{n_0}) \geq S_2 S_n q(z)$, somit: $S_{n+1} q \geq S_2 S_n q$
(dabei sei $o \text{BdA } I := \{1, \dots, n_0\}, n_0 \leq n+1; I' := I \setminus \{n_0\}, x' := x|_{I'} \}$)

Bew. 4L: b) vollst. Induktion mit a)

Bew. 4L: c): nach b) und 3L b)

Bew. 4L: d) Sei $x, x_0 \in X \Rightarrow$
 $(\forall K_1, K_2 \in \mathbb{R} : S_n q(x - x_0) < K_1, S_n q(x_0) < K_2 \Rightarrow S_{2n} q(x) < K_1 + K_2)$, somit:
 $S_{2n} q(x) \leq S_n q(x - x_0) + S_n q(x_0) \stackrel{2L}{\Rightarrow} S_{2n} q(x) \leq S_2 S_n q(x) \Rightarrow S_{2n} \leq S_2 \circ S_n$

Bew. 5L: $\leq : n=1: S_2 q = S_2 (S_1 q) = S_1 q \stackrel{3L}{\Rightarrow} (S_1 q \text{ subadd.}, S_1 q(o) \leq o)$
 $\stackrel{1,3,3L}{\Rightarrow} S_1 q = S q.$

$n=2$: zu zeigen: $S q \geq S_2 q$

a) Beh.: $\forall m \in \mathbb{N} : m \geq 2 (\forall K \in \mathbb{R} \forall x \in X^I (|I| = m; 1 \cdot (q \circ x) < K) \exists u \in X^J : |J| \leq 2, 1 \cdot u = 1 \cdot x, 1 \cdot (q \circ u) < K)$

Bew.: (vollst. Induktion nach m) Induktionsanfang:

$m=2$: trivial!

Sei die Beh. für $2 \leq l \leq m$ schon bewiesen!

Sei $K \in \mathbb{R}, x \in X^I : |I| = m+1 (o \text{BdA } I = \{1, 2, \dots, m+1\}), 1 \cdot (q \circ x) < K$

1. Fall: $(\exists i_0 \in I : q(x_{i_0}) > -\infty) \Rightarrow q(x_{i_0}) \in \mathbb{R}$,
sei $I' := I \setminus \{i_0\}, x' := x|_{I'} \Rightarrow 1 \cdot (q \circ x') < K - q(x_{i_0}) \stackrel{\text{Ind. ver.}}{\Rightarrow} (\exists u_n \in X^{J_n} : 1 \cdot u_n = 1 \cdot x', |J_n| \leq 2, 1 \cdot (q \circ u_n) < K - q(x_{i_0}), 1 \cdot u_n + x_{i_0} = 1 \cdot x, 1 \cdot (q \circ u_n) + q(x_{i_0}) < K)$
nun nach Vor.: $S_3 q = S_2 q : (\exists u \in X^J : |J| \leq 2, 1 \cdot u = 1 \cdot x, 1 \cdot (q \circ u) < K)$ qed

2. Fall: $(\forall i \in \mathbb{I} : q(x_i) = -\infty) : \mathbb{I}' := \mathbb{I} \setminus \{m+1\}, x' := x|_{\mathbb{I}'}, 1' \cdot x' = 1 \cdot x - x_{m+1}$
 $\Rightarrow 1' \cdot (q \circ x') < K \stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow} (\exists u_i \in X^{\mathbb{J}'} : |\mathbb{J}'| \leq 2, 1' \cdot u_i = 1' \cdot x' = 1 \cdot x - x_{m+1}, 1' \cdot (q \circ u_i) < K)$
 $\Rightarrow (1' \cdot u_i + x_{m+1} = 1 \cdot x, 1' \cdot (q \circ u_i) + q(x_{m+1}) < K) \Rightarrow$
 $\stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow} (\exists u \in X^{\mathbb{J}} : |\mathbb{J}| \leq 2, 1 \cdot x = 1 \cdot u, 1 \cdot (q \circ u) < K) \quad \text{qed.}$

b) Beh.: $S_2 q \leq S q$

Bew.: 1. Fall: $S q(z) = -\infty : \text{Sei } K \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $(\exists \mathbb{I} : |\mathbb{I}| < \infty \exists x \in X^{\mathbb{I}} : 1 \cdot x = z, 1 \cdot (q \circ x) < K) \stackrel{\text{a) Beh.}}{\Rightarrow} S_2 q(z) < K \Rightarrow$
 $S_2 q(z) = -\infty \Rightarrow S_2 q(z) = S q(z)$

2. Fall: $S q(z) \in \mathbb{R} : \mathbb{R}^2 \ni 0, K := S q(z) + \epsilon \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\exists \mathbb{I} : |\mathbb{I}| < \infty \exists x \in X^{\mathbb{I}} : \\ 1 \cdot (q \circ x) < K) \end{array} \right.$
 $\stackrel{\text{a) Beh.}}{\Rightarrow} S_2 q(z) < K = S q(z) + \epsilon \stackrel{\epsilon \downarrow 0}{\Rightarrow} S_2 q(z) \leq S q(z), \text{ somit } S_2 q \leq S q \Rightarrow$
 $S_2 q = S q \quad \text{qed.}$

n \geq 3: Die Fälle $n \geq 3$ lassen sich mit derselben Methode beweisen wie der Fall $n=2$, z.B. "a) Beh.:" lautet dann:

$\forall m \geq n (\forall K \in \mathbb{R} \forall x \in X^{\mathbb{I}} (|\mathbb{I}| = m, 1 \cdot (q \circ x) < K) \exists u \in X^{\mathbb{J}} (|\mathbb{J}| \leq n, 1 \cdot u = 1 \cdot x, 1 \cdot (q \circ u) < K))$

Beispiele zu 1.3

Bsp. a): $X := \mathbb{R}, q \in Q \text{ pos. hom.}, q(0) = 0$

Beh.: 1) $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : q(x) = \begin{cases} \alpha x & (x \geq 0) \\ -\beta x & (x \leq 0) \end{cases}$

2) $S_2 q = \begin{cases} q & (\alpha + \beta \geq 0) \\ -\infty \cdot 1^X & (\alpha + \beta < 0) \end{cases}$

3) $S_2 q = S q$

Bew.: Zu 2): Klar ist der Fall $\alpha \notin \mathbb{R} \vee \beta \notin \mathbb{R}$ (8 Fälle betrachten!)

Fall: $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : S_2 q(x) = \inf_{z_1+z_2=x} (q(z_1) + q(z_2)) = \inf_{\substack{z_1, z_2 \geq 0 \\ z_1, z_2 \leq 0}} (\alpha z_1 - \beta z_2) =$

$= \inf_{\substack{z_1, z_2 \geq 0 \\ z_1, z_2 \leq 0}} (\alpha z_1 + \beta(z_1 - x)) = (\inf_{z_1 \geq 0} (\alpha + \beta) z_1) - \beta x$

1. Fall: $\alpha + \beta \geq 0$: a) $x \geq 0 : \Rightarrow S_2 q(x) = \alpha x = q(x)$

b) $x \leq 0 : \Rightarrow S_2 q(x) = -\beta x = q(x)$

2. Fall: $\alpha + \beta < 0$: a) $x \geq 0$
 b) $x \leq 0 \} \Rightarrow S_2 q(x) = -\infty$

Bew.: Zu 3): Klar nach 1.32, 3L

Bsp. b): $X := \mathbb{R}^2$; $q: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $q(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow$
 $S_2 q(x_1, x_2) = \inf_{z_1, z_2 \in \mathbb{R}} (z_1^2 + z_2^2 + (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2) =$
 $\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, somit $S_n q = \frac{1}{2^n} q$, also nach 1.32, 4L:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n q = Sq = 0$

1.41 Der Operator R

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Def.: $R: Q \rightarrow Q$, def. durch

$$Rq(z) := \begin{cases} \inf \left\{ t(q \circ x) \mid |I| < \infty, x \in (\text{dom } q)^I, t \in \mathbb{R}^{+I}, tx = z \right\} & (z \in C(\text{dom } q)) \\ +\infty & (z \notin C(\text{dom } q)) \end{cases}$$

2 Lemma: a) $\text{dom } Rq = C(\text{dom } q)$

$$b) \forall z \in X: Rq(z) = \inf \left\{ t(q \circ x) \mid |I| < \infty, x \in X^I, t \in \mathbb{R}^{+I}, tx = z \right\}$$

3 Lemma: Vor.: $q \in Q$

Beh.: a) Rq pos.hom., subadd., $Rq(o) \leq o$

$$b) Rq \leq q$$

$$c) p \in Q, p \leq q \implies Rp \leq Rq$$

$$d) p \in Q \text{ pos.hom.}, \text{subadd.}, p(o) \leq o, p \leq q \implies p \leq Rq$$

$$e) p \in Q \text{ pos.hom.}, \text{subadd.}, p(o) \leq o \implies R(p+q) \geq p+Rq$$

$$f) (q \text{ pos.hom.}, \text{subadd.}, q(o) \leq o) \iff Rq = q$$

$$g) R \circ R = R, \alpha \in \mathbb{R}_+^+ \implies R(\alpha q) = \alpha Rq, R(q \circ j) = (Rq) \circ j$$

4 Lemma: Beh.: $R = S \circ P$

5 Lemma: Vor.: $p, q \in Q$

Beh.: $R(p+q) \geq Rp + Rq$

6 Lemma: Vor.: $p \in Q: p$ pos.hom., superadd.; $q \in Q, \text{dom } Rq \subset \text{dom}(p)$

Beh.: $R(p+q) \leq p + Rq$

7 Lemma: Vor.: $(p_i)_{i \in I}$ Familie aus Q

Beh.: 1) $\text{dom } R(\inf_{i \in I} p_i) = C(\bigcup_{i \in I} \text{dom } p_i)$

$$2) x_o \in \text{dom } R(\inf_{i \in I} p_i) \implies R(\inf_{i \in I} p_i)(x_o) = \inf \left\{ t \left(\left(\prod_{i \in J} p_i \right) (x) \right) \mid |J| < \infty, tx = x_o, f \in I^J, t \in \mathbb{R}^{+J}, x \in \prod_{i \in J} \text{dom } p_i \right\}$$

8 Lemma: Vor.: $(p_i)_{i \in I}$ Familie mit: $p_i \in Q$, pos.hom., subadd.

Beh.: $x_o \in \text{dom } R(\inf_{i \in I} p_i) \implies R(\inf_{i \in I} p_i)(x_o) =$

$$\inf \left\{ 1^J \cdot \left(\left(\prod_{i \in J} p_i \right) (x) \right) \mid |J| < \infty, J \subset I, x \in \prod_{i \in J} \text{dom } p_i, 1 \cdot x = x_o \right\}$$

9 Lemma: Vor.: $(p_i)_{i \in I}$ endliche Familie mit:

$$p_i \in Q, \text{ pos. hom.}, \text{ subadd.}, p_i(o) \leq o$$

$$\text{Beh.: } x_o \in \text{dom } R(\min_i p_i) \Rightarrow R(\min_i p_i)(x_o) = \inf \left\{ 1^I \cdot \left(\prod_{i \in I} p_i \right)(x) \mid x \in \prod_{i \in I} \text{dom } p_i, 1^I x = x_o \right\}$$

10 Lemma: Beh.: $R = S_A \circ P \circ co$ (wobei „co“ siehe 1.62)

11 Korollar: Vor.: $o \in ACX, A$ konv., $q \in Q$

$$\text{Beh.: } Rq \geq -p_A \Leftrightarrow co(q) \geq -p_A$$

12 Lemma: Vor.: $q: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, A \subset X, \tilde{q} := \widehat{-q \circ (j \mid (-A))}$

$$\text{Beh.: } 1) \text{ dom } R \min(\tilde{q}, \hat{q}) = \langle A \rangle$$

$$2) \forall z \in X: R \min(\tilde{q}, \hat{q})(z) = \inf \{ t \cdot (q \circ x) \mid |I| < \infty, t \in \overline{\mathbb{R}}^I, x \in A^I, tx = z \}$$

13 Lemma: Vor.: $q: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, A \subset X, f \in X', \tilde{q} := \widehat{-q \circ (j \mid (-A))}$

$$\text{Beh.: } f \stackrel{\hat{}}{=} \hat{q} \Leftrightarrow f \leq R \min(\tilde{q}, \hat{q})$$

14 Lemma: Vor.: $(q_i)_{i \in I}$ Familie mit $q_i \in Q$

$$\text{Beh.: } R(\inf_i q_i) = R(\inf_i Rq_i)$$

15 Lemma: Vor.: $q \in Q$

$$\text{Beh.: } Rq = \sup \{ p \in Q \mid p(o) \leq o, p \text{ sublin.}, p \leq q \}$$

16 Lemma: Vor.: $q \in Q, x_o \in X: x_o \neq o, \gamma \in \overline{\mathbb{R}}, x \in X$ (wobei $p_{(\gamma, x_o)}$ siehe 1.01)

$$\text{Beh.: } R \min(p_{(\gamma, x_o)}, q)(x) =$$

$$\min \left(\inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (Rq(-x_o + \alpha x) + \gamma), Rq(x), \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (Rq(x_o + \alpha x) - \gamma) \right)$$

17 Lemma: Vor.: $q \in Q, x_o \in X$ (wobei $(Rq)'$ siehe 1.61, 5D, 1.62, 11K)

$$\text{Beh.: } a) \gamma := -Rq(-x_o) \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \begin{cases} R \min(p_{(\gamma, x_o)}, q) = \\ (Rq)'(-x_o, \cdot) \end{cases}$$

$$b) \gamma := Rq(x_o) \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow R \min(p_{(\gamma, x_o)}, q) = (Rq)'(x_o, \cdot)$$

Beweise

Bew. 3L: a) $x_0 \in C(\text{dom } q), \alpha > 0$: also $Rq(\alpha x_0) =$
 $= \inf \{ t(q \circ x) \mid |I| < \infty, t \in \mathbb{R}^{+I}, x \in (\text{dom } q)^I, tx = x_0 \} =$
 $= \inf \{ \alpha(t(q \circ x)) \mid |I| < \infty, t \in \mathbb{R}^{+I}, x \in (\text{dom } q)^I, tx = x_0 \} = Rq(x_0)$
 weiter: $x, y \in C(\text{dom } q)$ 1. Fall: $Rq(x) = -\infty \vee Rq(y) = -\infty$:

$\circ B d A \ Rq(x) = -\infty$; sei gegeben $\mathbb{R} \ni K < 0 \Rightarrow$
 $\exists (\mu, t): \mu \in (\text{dom } q)^I, t \in \mathbb{R}^{+I}, |I| < \infty, t\mu = x, t(q \circ \mu) < K$; weiter:
 $\exists (\mu', t'): \mu' \in (\text{dom } q)^J, t' \in \mathbb{R}^{+J}, |J| < \infty, t'\mu' = y, J \cap I = \emptyset,$

$$t'(q \circ \mu') \leq \begin{cases} K & (Rq(y) = -\infty) \\ Rq(y) + 1 & (Rq(y) \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$\Rightarrow (x+y) = t\mu + t'\mu' \in \text{dom } Rq, t'(q \circ \mu') + t(q \circ \mu) \leq \begin{cases} 2K \\ K + Rq(y) + 1 \end{cases}$ bzw.) ,
 also $Rq(x+y) = -\infty$ qed.

2. Fall: $Rq(x), Rq(y) \in \mathbb{R}: \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} & \left(\exists (\mu, t): t \in \mathbb{R}^{+I}, \mu \in (\text{dom } q)^I, |I| < \infty, x = t\mu, Rq(x) + \varepsilon > t(q \circ \mu) \right) \\ & \left(\exists (\mu', t'): t' \in \mathbb{R}^{+J}, \mu' \in (\text{dom } q)^J, |J| < \infty, y = t'\mu', Rq(y) + \varepsilon > t'(q \circ \mu') \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rq(x+y) \leq t(q \circ \mu) + t'(q \circ \mu') < 2\varepsilon + Rq(x) + Rq(y) \Rightarrow \text{Beh. qed.}$

Bew. 3L: d) $p \leq q \Rightarrow p = R p \leq R q$

Bew. 3L: e) $\circ B d A \ x_0 \in C(\text{dom } p \wedge \text{dom } q) \Rightarrow R(p+q)(x_0) =$
 $= \inf \{ t((p+q) \circ x) \mid t \in \mathbb{R}^{+I}, x \in (\text{dom } p \wedge \text{dom } q)^I, |I| < \infty, tx = x_0 \} =$
 $= \inf \{ p(x_0) + t(q \circ x) \mid t \in \mathbb{R}^{+I}, x \in (\text{dom } p \wedge \text{dom } q)^I, |I| < \infty, tx = x_0 \} =$
 $= p(x_0) + Rq(x_0)$ qed.

Bew. 4L: $q \in Q \Rightarrow q \geq P q \geq S P q \Rightarrow R q \geq R S P q = S P q$
 $q \in Q \Rightarrow q \geq R q \Rightarrow S P q \geq R q \Rightarrow R = S P$

Bew. 5L: $R p + R q \stackrel{3L}{\leq} R(R p + q) \leq R(p+q)$

Bew. 6L: $\circ B d A \ x_0 \in C(\text{dom } q) \wedge R(p+q)(x_0) > -\infty$: Sei $t \in \mathbb{R}^{+I}, \mu \in (\text{dom } q)^I,$
 $|I| < \infty, t\mu = x_0$, dann gilt: $R(p+q)(x_0) \leq t((p+q) \circ \mu) = t(p \circ \mu) + t(q \circ \mu) \stackrel{1, 02, 5c}{\leq}$
 $p(x_0) + t(q \circ \mu) \Rightarrow R(p+q)(x_0) \leq p(x_0) + Rq(x_0)$ qed.

Bew. 7L: 2) Sei $q := \inf p_i$, $p :=$ Funktional auf der rechten Seite *

a) Sei $t \in \mathbb{R}^{+J}, x \in \bigcap_{i \in J} \text{dom } p_i, tx = x_0, f \in I^J, \Rightarrow t((\bigcap_{i \in J} p_i)(x)) \geq$
 $t((\inf_{i \in J} p_i) \circ x) \geq t((\inf_{i \in J} p_i) \circ x) \geq Rq(x_0) \Rightarrow p(x_0) \geq Rq(x_0)$.
 b) $\circ B d A \ Rq(x_0) \in \mathbb{R}: t \in \mathbb{R}^{+J}, x \in (\text{dom } q)^J, |J| < \infty, tx = x_0 \Rightarrow$

$(q(x_i) \in \overline{R} \forall i \in J); \epsilon > 0 \Rightarrow (\exists f \in \overline{I} \forall i \in J: q(x_i) + \epsilon > p_{f_i}(x_i)) \Rightarrow$
 $t(q \circ x) \geq t((\bigcap_{i \in J} p_{f_i})(x)) - \epsilon(1^J \cdot t) \geq p(x_0) - \epsilon(1^J \cdot t) \xrightarrow{\epsilon > 0} t(q \circ x) \geq p(x_0) \Rightarrow$
 $Rq(x_0) \geq p(x_0) \quad \text{qed.}$

Bew. 8L: $t \in \overline{R}^J, f \in \overline{I}^J, x \in \prod_{i \in J} \text{dom } p_{f_i}, |J| < \infty, tx = x_0 \Rightarrow t((\bigcap_{i \in J} p_{f_i})(x)) \geq$
 $\text{"rechte Seite in 8L"} \Rightarrow \text{Beh.}$

Bew. 9L: $J \subset I, x \in \prod_{i \in J} \text{dom } p_i, 1^J \cdot x = x_0 \Rightarrow 1^J \cdot ((\bigcap_{i \in J} p_i)(x)) = \sum_{i \in J} p_i(x_i) \geq$
 $\sum_{i \in J} p_i(o) + \sum_{i \in J} p_i(x_i) \geq \text{"rechte Seite von 9L"} \xrightarrow{8L} \text{Beh.}$

Bew. 10L: $q \in Q \Rightarrow (S_A \circ P \circ co)q =: p \text{ pos. hom., subadd., } p(o) \leq o \Rightarrow$
 $Rp \leq Rq, \text{ also } S_A \circ P \circ co \leq R.$

$q \in Q \Rightarrow Rq \leq q \Rightarrow co Rq = Rq \leq co(q) \Rightarrow PRq = Rq \leq P \circ co \ q \Rightarrow S_A \circ Rq = Rq \leq$
 $S_A \circ P \circ co \ q, \text{ also } R \leq S_A \circ P \circ co \quad \text{qed.}$

Bew. 11K: Nach 10L: $Rq \geq -p_A \Leftrightarrow S_A \circ P \circ co \ q \geq -p_A \Leftrightarrow P \circ co \ q \geq -p_A$
 $\Leftrightarrow co \ q \geq -p_A.$

Bew. 12L: Sei $r(z) := \inf \{ t(q \circ x) \mid |I| < \infty, t \in \overline{R}^I, x \in A^I, tx = z \} \quad (z \in X)$
 $\Rightarrow \text{dom } r = \langle A \rangle$, weiter (nach 1.5, 3L, 2L): $\text{dom } R \min(\tilde{q}, \hat{q}) =$
 $= \text{dom } F(R\tilde{q}, R\hat{q}) = C(A) + C(-A) = \langle A \rangle$, also Beh. 1).

Sei $z \in \langle A \rangle \Rightarrow R \min(\tilde{q}, \hat{q})(z) =$
 $= \inf \{ t(q \circ x) + \tau(\tilde{q} \circ y) \mid |I|, |J| < \infty, t \in \overline{R}^I, \tau \in \overline{R}^J, x \in A^I, y \in (-A)^J, tx + \tau y = z \} =$
 $= \inf \{ t(q \circ x) \mid |I| < \infty, t \in \overline{R}^I, x \in A^I, tx = z \} = r(z) \quad \text{qed.}$

Bew. 13L: $f \leq \hat{q} \Leftrightarrow (f \leq \hat{q}, f \geq \hat{q}) \ \& \ \text{Nun: } f \geq \hat{q} \Leftrightarrow f \circ j \geq \hat{q} \circ j \Leftrightarrow$
 $f \leq -\hat{q} \circ j \Leftrightarrow f \leq \tilde{q}, \text{ also: } \& \Leftrightarrow f \leq R \min(\tilde{q}, \hat{q}) \quad \text{qed.}$

Bew. 14L: zu zeigen: $R(\inf q_i) \leq R(\inf Rq_i)$ Bew.: $R(\inf q_i) \leq q_i$
 $\Rightarrow R R(\inf q_i) \leq Rq_i \Rightarrow R(\inf q_i) \leq \inf Rq_i \Rightarrow R(\inf q_i) =$
 $= R \circ R(\inf q_i) \leq R(\inf Rq_i) \quad \text{qed.}$

Bew. 15L: $p \in Q: p(o) \leq o, p \text{ sublin., } p \leq q \xrightarrow{3L} p \leq Rq, \text{ also:}$
 $p_o := \sup \{ p \in Q \mid p(o) \leq o, p \text{ sublin., } p \leq q \} \leq Rq; \text{ weiter (3L):}$
 $Rq(o) \leq o, Rq \text{ sublin., } Rq \leq q \Rightarrow Rq \leq p_o \quad \text{qed.}$

Bew. 16L: $R \min(p_{(\tilde{q}, \hat{q})} q)(x) = \inf \{ \gamma \cdot \alpha + Rq(x - \alpha x_0) \mid \alpha \in \overline{R} \} =$
 $= \min(\inf_{\alpha > 0} (\alpha \tilde{q} + Rq(x - \alpha x_0)), Rq(x), \inf_{\alpha < 0} (\alpha \hat{q} + Rq(x - \alpha x_0))) \text{ nun:}$
 $\inf_{\alpha > 0} (\alpha \tilde{q} + Rq(x - \alpha x_0)) = \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (Rq(-x_0 + \alpha x) + \tilde{q}), \inf_{\alpha < 0} (\alpha \hat{q} + Rq(x - \alpha x_0)) =$
 $= \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (Rq(x_0 + \alpha x) - \hat{q}), \text{ also die Beh.}$

Bew. 17L: Fall $x_0 = o$: $\Rightarrow R \min(p_{(\tilde{q}, \hat{q})} q) = Rq$, weiter: $(Rq)^1(o, \cdot) =$
 $= Rq$, also Beh. a) b). Fall $x_0 \neq o$: zu a): $\inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (Rq(-x_0 + \alpha x) - Rq(-x_0)) =$
 $= (Rq)^1(-x_0, x) \leq Rq(x); \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (Rq(x_0 + \alpha x) + Rq(-x_0)) \geq Rq(x)$, also nach
 16L die Beh.

zub): $\inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (Rq(-x_0 + \alpha x) + Rq(x_0)) \geq Rq(x); \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (Rq(x_0 + \alpha x) - Rq(x_0)) =$
 $(Rq)^1(x_0, x) \leq Rq(x)$, also nach 16L die Beh. qed.

1.42 Die Operatoren $R_n (n \in \mathbb{N})$

Allgemeine Vor.: X VR über $\overline{\mathbb{R}}$

1 Def.: Sei $n \in \mathbb{N}$, $q \in Q$

$R_n: Q \rightarrow Q$ sei def. durch

$$R_n q(z) := \inf \{ t(q \circ x) \mid |I| \leq n, x \in X, t \in \overline{\mathbb{R}}^+, tx = z \}$$

2 Lemma: Vor.: $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in Q$

- Beh.:
- | | |
|--|--------------------------|
| a) $R_n q \leq q$ | d) $R_1 = S_1 \circ P$ |
| b) $p \leq q \Rightarrow R_n p \leq R_n q$ | e) $R_n q$ pos. hom. |
| c) $R_n q(0) \leq 0$ | f) $S_n \circ R_n = R_n$ |

3 Lemma: Vor.: $q \in Q$

- Beh.:
- a) $n \geq m, n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow Rq \leq R_n q \leq R_m q$
 - b) $R_n = S_n \circ P \quad (n \in \mathbb{N})$
 - c) $x \in X \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n q(x) = Rq(x)$
 - d) $R \circ R_n = R_n \circ R = R \quad (n \in \mathbb{N})$
 - e) $R_n q$ subadd. $\Leftrightarrow Rq = R_n q \quad (n \in \mathbb{N})$
 - f) $(\exists n_0 \in \mathbb{N}: n_0 \geq 2, R_{n_0} q = q) \Leftrightarrow (q(0) \leq 0, q \text{ sublin.})$
 - g) $(q(0) \leq 0, q \text{ sublin.}) \Leftrightarrow R_2 q = q$
 - h) $R_2 \circ R_1 = R_1$

4 Lemma: Vor.: $q \in Q, n \in \mathbb{N}$

- Beh.:
- a) $R_{n+1} \geq R_2 \circ R_n$
 - b) $R_{n+1} \geq R_2^n$ (wobei $R_2^n := R_2 \circ R_2 \dots \circ R_2$ n -mal)
 - c) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_2^n q = Rq$
 - d) $R_2 \circ R_n \geq R_{2n}$

5 Lemma: Vor.: $q \in Q, n \in \mathbb{N}$

- Beh.: $R_n q = Rq \Leftrightarrow R_n q = R_{n+1} q$

Beweise

Bew. 2L:d) Fall $z \neq 0$: $R_q(z) = \inf \left\{ t q \left(\frac{z}{t} \right) \mid t \in \mathbb{R}^+ \right\} = P_q(z)$

Fall $z=0$: $R_q(0) = \min(0, \inf \{ t q(0) \mid t \in \mathbb{R}^+ \}) =$

$= \min(0, P_q(0))$, also $R_q(z) = (S_q \circ P_q)(z)$ qed.

Bew. 3L: b) $R_n q(z) \geq \inf \{ t(P_q \circ x) \mid |I| \leq n, x \in X, t \in \mathbb{R}^+, tx=z \} = S_n(P_q)(z)$
 $= (S_n P)q(z) \Rightarrow R_n \geq S_n \circ P$; weiter $R_n q \leq q \xRightarrow{2e} P R_n q = R_n q \leq P q \xRightarrow{2f}$

$S_n R_n q = R_n q \leq S_n \circ P q \Rightarrow R_n \leq S_n \circ P$ qed.

Bew. 3L: c) Nach 1.32, 3L; 3Lb) gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n q(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(P_q)(z) =$
 $= S(P_q)(z) = R_q(z)$

Bew. 3L: d) $R_n \leq I$ (I hier Identität $Q \rightarrow Q$) $\Rightarrow R \circ R_n \leq R$; weiter:

$R \leq R_n \Rightarrow R = R \circ R \leq R \circ R_n \Rightarrow (R = R_n \circ R, R = R \circ R_n) \Rightarrow R = R \circ R_n = R_n \circ R$

Bew. 3L: e) $R_n q$ subadd. $\xRightarrow{3b} S_n(P_q)$ subadd. $\Rightarrow S_n(P_q) = S(P_q) =$
 $= R_n q = R_q$.

Bew. 3L: f) Benütze 3L g)

Bew. 3L: g) $\Rightarrow$: Nach 1.32, 3Le): $R_2 q = S_2 P q = S_2 q = q$

$\langle \Rightarrow R_2 q = q \Rightarrow R_2 q = P q = q \Rightarrow q$ pos.hom. ; weiter:

$R_2 q \leq S_2 q \leq q \Rightarrow S_2 q = q \Rightarrow (q(0) \leq 0, q$ subadd.) , also die Beh.

Bew. 3L: h) $R_2 \circ R_2 = S_2 \circ P \circ S_2 \circ P = S_2 \circ S_2 \circ P = S_2 \circ P = R$ (nach 1.32, 3L)

Bew. 4L: a) $R_{n+1} = S_{n+1} \circ P \circ S_2 \circ S_n \circ P = S_2 \circ P \circ S_n \circ P = R_2 \circ R_n$

b) $R_{n+1} \circ S_{n+1} \circ P \circ S_2 \circ P = (S_2 \circ P) \circ (S_2 \circ P) \dots (S_2 \circ P) = R_n$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n q = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_2 \circ P)^n q = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_2 \circ P)^n q = S \circ P q = R_q$

d) $R_2 R_n = S_2 \circ P \circ S_n \circ P = S_2 \circ S_n \circ P \circ S_2 \circ P = R_{2n}$

(dabei benütze man 1.32, 4L)

Bew. 5L: $\langle \Rightarrow$: $R_n q = R_{n+1} q = S_n(P_q) = S_{n+1}(P_q) \xRightarrow{4.32, 5L} S_n(P_q) = S(P_q) = R_n q = R_q$

1.51 Der Operator F

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Def.: $F: Q \times Q \rightarrow Q$ def. durch

$$F(p, q)(x) := \begin{cases} \inf \{ p(x_1) + q(x_2) \mid x_1 \in \text{dom } p, x_2 \in \text{dom } q, x = x_1 + x_2 \} & (x \in \text{dom } F(p, q)) \\ +\infty & (x \notin \text{dom } F(p, q)) \end{cases}$$

2 Lemma: Vor.: $p, q \in Q$

Beh.: a) $\text{dom } F(p, q) = \text{dom } p + \text{dom } q$

b) $\text{dom } R \min(p, q) = C(\text{dom } p) + C(\text{dom } q)$

c) $\forall x \in X: F(p, q)(x) = \inf \{ p(x_1) + q(x_2) \mid x_1, x_2 \in X, x = x_1 + x_2 \}$

3 Lemma: Vor.: $p, q, p_1, p_2 \in Q$

Beh.: a) $F(p, q) = F(q, p)$

b) $p(o) \leq o, q(o) \leq o \Rightarrow F(p, q) \leq \min(p, q)$

c) $p_1 \leq p_2 \Rightarrow F(p_1, q) \leq F(p_2, q)$

d) $\alpha \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow F(\alpha p, \alpha q) = \alpha F(p, q)$

e) p, q pos.hom. $\Rightarrow F(p, q)$ pos.hom.

f) p, q subadd. $\Rightarrow F(p, q)$ subadd.

g) $R \min(p, q) = F(Rp, Rq) = R \min(Rp, Rq)$

4 Lemma: Vor.: $p, q \in Q$

Beh.: $F(p, q)(o) \geq o \Leftrightarrow (\forall z \in \text{dom } p \cap (-\text{dom } q): p(z) \geq -q(-z))$

5 Lemma: Vor.: $o \in A \subset X, A$ konv., $q \in Q, z \in X$

Beh.: $F(Rq, p_A)(z) =$

$$= \inf \{ t(q \circ x) + \alpha \mid \|I\| < \infty, \alpha \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}^+, x \in X, tx - z \in \alpha A \}$$

Beweise

Bew. 3L:e oBdA $x_0 \in \text{dom } p + \text{dom } q, \alpha > 0 \implies F(p, q)(\alpha x_0) =$
 $\inf \{ p(\alpha x_0 - z) + q(z) \mid z \in \text{dom } q \cap (\alpha x_0 - \text{dom } p) \} =$
 $\inf \{ p(\alpha x_0 - \alpha z) + q(\alpha z) \mid z \in \text{dom } q \cap (x_0 - \text{dom } p) \} = \alpha F(p, q)(x_0)$

Bew. 3L:f Sei $x, y \in \text{dom } F(p, q)$, oBdA $F(p, q)(x+y) > -\infty$,
 $\text{dom } p + \text{dom } p \subset \text{dom } p$, dasselbe für $q, x+y \in \text{dom } F(p, q) \implies$
 $\mathbb{R} \ni F(p, q)(x+y)$; sei $z_1 \in \text{dom } q \cap (x - \text{dom } p), z_2 \in \text{dom } q \cap (y - \text{dom } p) \implies$
 $F(p, q)(x+y) \leq p(x+y-z_1-z_2) + q(z_1+z_2) \leq p(x-z_1) + q(z_1) +$
 $p(y-z_2) + q(z_2) \implies \text{Beh.}$

Bew. 3L:g $R \min(p, q) \geq R \min(Rp, Rq) = F(Rp, Rq)$ (wegen 1.41, 9L);
 $R \min(p, q) \leq \min(Rp, Rq) \implies R \min(p, q) \leq R \min(Rp, Rq)$

Bew. 5L: Sei $p(z) :=$ "rechte Ausdruck", nun: $|I| < \infty, \alpha \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}^{+I}$,
 $x \in X, tx - z \in A \implies F(Rq, p_A)(z) \leq Rq(tx) + p_A(z - tx) \leq t \cdot (q \circ x) +$
 $+\alpha$, also $F(Rq, p_A) \leq p$.

1.Fall: $F(Rq, p_A)(z) = -\infty: K \in \mathbb{R} \implies$
 $(\exists x_1, x_2 \in X: x_1 + x_2 = z, Rq(x_1) + p_A(x_2) < K) \implies$
 $(\exists(I, t, x, \alpha): |I| < \infty, t \in \mathbb{R}^{+I}, x \in X, \alpha \in \mathbb{R}^+, tx = x_1, \frac{-x_2}{\alpha} \in A, t(q \circ x) + \alpha < K) \implies$
 $p(z) < K$, also $p(z) = -\infty$.

2.Fall: $F(Rq, p_A)(z) \in \mathbb{R}: \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \implies$
 $(\exists x_1, x_2 \in X: x_1 + x_2 = z, F(Rq, p_A)(z) + \varepsilon > Rq(x_1) + p_A(x_2)) \implies$
 $(\exists(I, t, x, \alpha): |I| < \infty, t \in \mathbb{R}^{+I}, x \in X, \alpha \in \mathbb{R}^+, tx = x_1, \frac{-x_2}{\alpha} \in A, F(Rq, p_A)(z) + \varepsilon >$
 $> t \cdot (q \circ x) + \alpha)$
 $\implies F(Rq, p_A)(z) + \varepsilon > p(z)$, also $F(Rq, p_A)(z) \geq p(z)$. qed.

1.52 Der Operator @

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Def.: $\bigoplus_{i=1}^n : (\prod_{i=1}^n Q) \rightarrow Q$ sei def. durch (wobei $n \in \mathbb{N}$, $I := [1, n]_{\mathbb{N}}$)

$$\bigoplus_{i=1}^n q_i(z) := \inf \left\{ 1^I \cdot \left(\left(\prod_{i=1}^n q_i \right) \circ x \right) \mid x \in X^I, 1^I \cdot x = z \right\} \quad (z \in X)$$

($\bigoplus_{i=1}^n q_i$ heißt "Konvolution der $(q_i)_{i \in I}$ ")

2 Lemma: Vor.: $(q_i)_{i \in I}$ endliche Familie aus Q

- Beh.:
- a) $(\forall i \in I: q_i(o) \leq o) \Rightarrow (\forall i \in I: \bigoplus_{i=1}^n q_i \leq q_i)$
 - b) $(p_i)_{i \in I}$ Familie mit $\forall i \in I (p_i \in Q, p_i \leq q_i) \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^n p_i \leq \bigoplus_{i=1}^n q_i$
 - c) $\alpha \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^n (\alpha q_i) = \alpha \left(\bigoplus_{i=1}^n q_i \right)$
 - d) $(\forall i \in I: q_i \text{ pos. hom.}) \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^n q_i \text{ pos. hom.}$
 - e) $(\forall i \in I: q_i \text{ subadd.}) \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^n q_i \text{ subadd.}$
 - f) $(\forall i \in I: q_i \text{ konv.}) \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^n q_i \text{ konv.}$
 - g) $R(\min_{i \in I} q_i) = \bigoplus_{i=1}^n (Rq_i)$
 - h) $p, q \in Q \Rightarrow p \otimes q = R(p, q)$

3 Lemma: Vor.: wie 2L

Beh.: $\text{dom} \left(\bigoplus_{i=1}^n q_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{dom } q_i$

Beweise

Bew. 2L:e), f) oBdA $z_1, z_2 \in \text{dom} \left(\bigoplus_{i=1}^n q_i \right)$; sei $\begin{matrix} \mathbb{R} \ni K_1 > (\bigoplus_{i=1}^n q_i)(z_1) \\ \mathbb{R} \ni K_2 > (\bigoplus_{i=1}^n q_i)(z_2) \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ \exists x_i \in X^I: 1^I \cdot x_i = z_i, K_i > 1^I \cdot \left(\left(\prod_{i=1}^n q_i \right) \circ x_i \right) \right.$

$\Rightarrow$ analog für z_2

Bew.e): $\Rightarrow (K_1 + K_2) > 1^I \cdot \left(\left(\prod_{i=1}^n q_i \right) \circ (x_1 + x_2) \right) \geq (\bigoplus_{i=1}^n q_i)(z_1 + z_2)$

also $(\bigoplus_{i=1}^n q_i)(z_1) + (\bigoplus_{i=1}^n q_i)(z_2) \geq (\bigoplus_{i=1}^n q_i)(z_1 + z_2)$ qed.

Bew.f): $\alpha \in]0, 1[\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha K_1 + (1 - \alpha) K_2 > \alpha \cdot (1^I \cdot \left(\left(\prod_{i=1}^n q_i \right) \circ x_1 \right)) + (1 - \alpha) \cdot (1^I \cdot \left(\left(\prod_{i=1}^n q_i \right) \circ x_2 \right)) \geq$

$\geq \left(\prod_{i=1}^n q_i \right) \circ (\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \geq (\bigoplus_{i=1}^n q_i)(\alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2)$, daraus die Beh.

Bew. 2L: g) Benütze 1.41, 9L, 14L.

1.61 Funktionale

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Lemma: Vor.: $p, q \in Q$ pos. hom.

Beh.: $q \leq p \iff \begin{cases} \forall x \in X: p(x) \leq 1 \implies q(x) \leq 1 \\ \forall x \in X: p(x) \leq -1 \implies q(x) \leq -1 \end{cases}$

2 Lemma: Vor.: wie 1L

Beh.: $q \leq p \iff \begin{cases} \forall x \in X: p(x) < 1 \implies q(x) \leq 1 \\ \forall x \in X: p(x) < -1 \implies q(x) \leq -1 \end{cases}$

3 Lemma: Vor.: X top. VR über $\mathbb{R}$, $f \in X'$; $f[K]$ nach oben(unten) beschr.

$K \subset X: K \neq \emptyset$

Beh.: $f \in X^*$

4 Def.: Sei $q \in Q, x_0 \in X$ mit: $\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} (q(x_0 + \alpha x) - q(x_0))$ exist. für $x \in X$ in $\overline{K}$
(mit natürlicher Top. siehe 1.02, 1)

Def.: $q'(x_0, x) := \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} (q(x_0 + \alpha x) - q(x_0))$ heißt
"(Richtungs-)Ableitung von q in x_0 " (in Richtung x)

Beweise

Bew. 1L: $\Leftarrow = 1.$ Fall: $p(x) = +\infty \Rightarrow p(x) \geq q(x)$

2. Fall: $0 < p(x) < +\infty \Rightarrow p\left(\frac{x}{p(x)}\right) = 1 \Rightarrow q\left(\frac{x}{p(x)}\right) \leq 1$
 $\Rightarrow q(x) \leq p(x).$

3. Fall: $p(x) = 0$ sei $\lambda > 0 = p(x) \Rightarrow 1 > p\left(\frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow$
 $q\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \Rightarrow q(x) \leq \lambda$, also $q(x) \leq 0 = p(x).$

4. Fall: $\mathbb{R} \ni p(x) < 0 \Rightarrow p\left(\frac{x}{-p(x)}\right) = -1 \Rightarrow q\left(\frac{x}{-p(x)}\right) \leq -1$
 $\Rightarrow q(x) \leq p(x).$

5. Fall: $p(x) = -\infty \mathbb{R} \ni K < 0 \Rightarrow p\left(\frac{x}{-K}\right) \leq -1 \Rightarrow q\left(\frac{x}{-K}\right) \leq -1$
 $\Rightarrow q(x) \leq K$, also $q(x) = -\infty = p(x)$ qed.

Bew. 2L: $\Leftarrow =$: Nach 1L zu zeigen: (a) $\forall x \in X: p(x) = 1 \Rightarrow q(x) \leq 1$
 (b) $\forall x \in X: p(x) = -1 \Rightarrow q(x) \leq -1$

zu (a): $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0 \Rightarrow p\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) < 1 \Rightarrow q\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) \leq 1 \Rightarrow q(x) \leq p(x) + \varepsilon$
 also $(\varepsilon \downarrow 0): q(x) \leq p(x).$

zu (b): $1 > \varepsilon > 0 \Rightarrow p\left(\frac{x}{-p(x)-\varepsilon}\right) = \frac{-1}{1-\varepsilon} < -1 \Rightarrow q\left(\frac{x}{-p(x)-\varepsilon}\right) \leq -1$
 $\Rightarrow q(x) \leq p(x) + \varepsilon$, also $(\varepsilon \downarrow 0): q(x) \leq p(x) = -1$ qed.

Bew. 3L: $\exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in K: f(x) \leq \alpha$; weiter: $\exists U \in \mathcal{U}(o) \exists x_o \in K: x_o + U \subset K$; also
 $u \in U \Rightarrow x_o + u \in K \Rightarrow f(x_o + u) \leq \alpha \Rightarrow f(u) \leq \alpha - f(x_o)$,
 somit $f \in X^*$ qed.

1.62 Konvexe Funktionale

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Def.: $q \in Q$ konv. : $\Leftrightarrow (\forall x, y \in X \forall \alpha \in [0, 1] : q(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha q(x) + (1-\alpha)q(y))$

2 Def.: $co: Q \rightarrow Q$ sei def. durch

$$co(q)(z) := \inf \{ t \cdot (q \circ x) \mid |I| < \infty, t \in \mathbb{R}^I, x \in X, 1^I \cdot t = 1, tx = z \}$$

Beh.: $\text{dom } co(q) = co(\text{dom } q)$

3 Lemma: Vor.: $p, q \in Q$

Beh.: a) $co(q)$ konv.

b) $co(q) \leq q$

c) $p \leq q \Rightarrow co(p) \leq co(q)$

d) q konv. $\Leftrightarrow co(q) = q$

e) $co \circ co = co$

f) $(q_i)_{i \in I}$ Familie aus $Q \Rightarrow \begin{cases} co(\inf q_i) = co(\inf co(q_i)) \\ \text{dom } co(\inf q_i) = co(\bigcup_{i \in I} \text{dom } q_i) \end{cases}$

4 Lemma: Vor.: $p, q \in Q$

Beh.: a) p, q konv. $\Rightarrow p+q$ konv.

b) $co(p+q) \geq co(p) + co(q)$

c) $x, x_0 \in X \Rightarrow co(q(x_0 + \cdot))(x) = co(q)(x_0 + x)$

d) $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow co(q + \alpha 1^X) = co(q) + \alpha 1^X$

5 Lemma: Vor.: $(q_i)_{i \in I}$ Familie aus $Q: \forall i \in I (q_i \text{ konv.})$

Beh.: $\sup q_i$ konv.

6 Lemma: Vor.: $q \in Q$

Beh.: $\sup \{ p \in Q \mid p \text{ konv. } p \leq q \} = co(q)$

7 Lemma: Vor.: $q \in Q(\mathbb{R})$ konv., $0 \leq \mu \leq \nu < \infty$

Beh.: $q(\mu) \leq \frac{\mu}{\nu} q(\nu) + (1 - \frac{\mu}{\nu}) q(0)$

8 Lemma: Vor.: $q \in Q(\mathbb{R})$ konv.; $q(1) < \infty$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+, \lambda > 1 > \mu$

Beh.: $\mu \frac{\frac{1}{\lambda} q(\mu) - q(1)}{\mu - 1} \leq \lambda \cdot \frac{\frac{1}{\lambda} q(\lambda) - q(1)}{\lambda - 1}$

9 Lemma: Vor.: $q \in Q$ konv.; $x, x_0 \in X$

$p \in Q(\mathbb{R})$ def. durch $p(\alpha) := q(x_0 + \alpha x) - q(x_0)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Beh.: $p \in Q(\mathbb{R})$ konv.

10 Lemma: Vor.: $q \in Q$ konv.; $x, x_0 \in X: q(x_0) \in \mathbb{R}$

Beh.: $\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha} p(\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) monoton $\uparrow$ (p siehe 9L)

11 Korollar: Vor.: $q \in Q$ konv., $x_0 \in X: q(x_0) \in \mathbb{R}$

Beh.: a) $\forall x \in X: q'(x_0, x)$ existiert (in $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\text{b) } q'(x_0, \cdot) = P(q(x_0 + \cdot) - q(x_0)) = \\ R(q(x_0 + \cdot) - q(x_0))$$

c) $q'(x_0, \cdot)$ sublin., $q'(x_0, 0) = 0$

Beweise

Bew.: 3La): oBdA $y_1, y_2 \in \text{dom } \text{co}(q); \alpha \in]0, 1[$; sei $\left. \begin{array}{l} \mathbb{R} \ni K_1 > \text{co}(q)(y_1) \\ \mathbb{R} \ni K_2 > \text{co}(q)(y_2) \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists I_1 (|I_1| < \infty) \exists x_1 \in X \exists t_1 \in \mathbb{R}^I: 1^I \cdot t_1 = 1, t_1 \cdot x_1 = y_1, K_1 > t_1 \cdot (q \circ x_1) \\ \text{analog f\"ur } y_2 \quad (\text{mit } I_1 \cap I_2 = \emptyset) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha t_1 \cdot (x_1 + (1-\alpha) \cdot 0) > \alpha(t_1 \cdot (q \circ x_1)) + (1-\alpha) \cdot (t_1 \cdot (q \circ 0)) \geq \text{co}(q)(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \\ \alpha t_2 \cdot (x_2 + (1-\alpha) \cdot 0) > \alpha(t_2 \cdot (q \circ x_2)) + (1-\alpha) \cdot (t_2 \cdot (q \circ 0)) \geq \text{co}(q)(\alpha y_2 + (1-\alpha)y_1) \end{array} \right. ;$$

$$\text{also: } \alpha \text{co}(q)(y_1) + (1-\alpha) \text{co}(q)(y_2) \geq \text{co}(q)(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \quad \text{qed.}$$

Bew.: 3Lf): Analog 1.41, 14L

$$\text{Bew.}: 4Lb): \text{co}(p) + \text{co}(q) \leq p + q \Rightarrow \text{co}(p) + \text{co}(q) = \text{co}(\text{co}(p) + \text{co}(q)) \leq \\ \leq \text{co}(p + q)$$

$$\text{Bew.}: 4Lc): \text{co}(q(x_0 + \cdot))(x) = \inf \{ t \cdot (q(x_0 + \cdot) \circ y) \mid |I| < \infty, t \in \mathbb{R}^I, y \in X, \\ 1^I \cdot t = 1, t y = x \} = \inf \{ t \cdot (q \circ y) \mid |I| < \infty, t \in \mathbb{R}^I, y \in X, 1^I \cdot t = 1, t y = x + x_0 \} = \\ \text{co}(q)(x_0 + x) \quad \text{qed.}$$

Bew.: 4Ld): Ben\"utze 1.o2, 6c)

$$\text{Bew.}: 5L: x, y \in X, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow (\sup q)(\alpha x + (1-\alpha)y) = \sup q(\alpha x + (1-\alpha)y) \\ = \sup(\alpha q(x) + (1-\alpha)q(y)) \leq \alpha \sup q(x) + (1-\alpha) \sup q(y) \quad \text{qed.}$$

$$\text{Bew.}: 6L: p \in Q, p \text{ konv.}, p \leq q \stackrel{3Lc)4d)}{\Rightarrow} p \leq \text{co}(q), \text{ also: } p_0 := \\ \sup \{ p \in Q \mid p \text{ konv.}, p \leq q \} \leq \text{co}(q); \text{ weiter nach 3La)b):} \\ (\text{co}(q) \leq q \wedge \text{co}(q) \text{ konv.}) \Rightarrow p_0 \geq \text{co}(q) .$$

Bew.: 8L: oBdA $q(\mu) < +\infty, q(\lambda) < +\infty, q(1) > -\infty$, also $q(1) \in \mathbb{R}$; nun:

$$q(1) = q\left(\frac{\lambda-1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}((1-\mu)\lambda + \mu)\right) \leq \frac{\lambda-1}{\lambda} q(\mu) + \frac{1}{\lambda} q((1-\mu)\lambda + \mu) \leq \frac{\lambda-1}{\lambda} q(\mu) +$$

$$\frac{1-\mu}{\lambda} q(\lambda) + \frac{\mu}{\lambda} q(1) ; \text{ 1. Fall: } q(\mu) = -\infty \Rightarrow q(\lambda) = +\infty \Rightarrow \text{Beh.};$$

$$\text{2. Fall: } q(\mu) > -\infty \Rightarrow q(\mu) \in \mathbb{R} \Rightarrow q(\lambda) > -\infty \Rightarrow q(\lambda) \in \mathbb{R}, \text{ also:}$$

$$\lambda q(1) \leq (\lambda-1)q(\mu) + (1-\mu)q(\lambda) + \mu q(1) \Rightarrow \lambda q(1) - \lambda \mu q(1) \leq (\lambda-1)q(\mu) + \\ + (1-\mu)q(\lambda) + \mu q(1) - \lambda \mu q(1) \Rightarrow \lambda(1-\mu)q(1) \leq (\lambda-1)q(\mu) + (1-\mu)q(\lambda) + \\ \mu(1-\lambda)q(1) \Rightarrow -(\lambda-1)(q(\mu) - \mu q(1)) \leq (1-\mu)(q(\lambda) - \lambda q(1)) \Rightarrow \text{Beh.}$$

$$\text{Bew.}: 9L: \mu \in]0, 1[; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow p(\mu\alpha + (1-\mu)\beta) = q(x_0 + (\mu\alpha + (1-\mu)\beta)x) -$$

$$\begin{aligned}
 -q(x_0) &= q(\mu(x_0 + \alpha x) + (1-\mu)(x_0 + \beta x)) - q(x_0) \stackrel{4.02, 5e)}{\leq} \mu q(x_0 + \alpha x) + (1-\mu)q(x_0 + \beta x) - \\
 &\mu q(x_0) - (1-\mu)q(x_0) \stackrel{4.01, 5b)}{=} \mu(q(x_0 + \alpha x) - q(x_0)) + (1-\mu)(q(x_0 + \beta x) - q(x_0)) = \\
 &\mu p(\alpha) + (1-\mu)p(\beta) \quad \text{qed.}
 \end{aligned}$$

Bew.: 10L: Sei $0 < \alpha \leq \beta \Rightarrow \frac{1}{\alpha}p(\alpha) \leq \frac{1}{\beta}p(\beta) + (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta})p(0) = \frac{1}{\beta}p(\beta)$, da $p(0) = q(x_0) - q(x_0) = 0$ wegen $q(x_0) \in \mathbb{R}$.

Bew.: 11K: Nach 10L ist $\alpha \mapsto \frac{1}{\alpha}(q(x_0 + \alpha x) - q(x_0))$ ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) monoton $\uparrow$, also: $\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}(q(x_0 + \alpha x) - q(x_0)) = P(q(x_0 + \cdot) - q(x_0))(x)$ exist., somit a), b). Weiter: $P(q(x_0 + \cdot) - q(x_0))(0) = 0$, $q(x_0 + \cdot) - q(x_0)$ konv., also nach 1.41, 10L; 1.2, 9L: $P(q(x_0 + \cdot) - q(x_0)) = R(q(x_0 + \cdot) - q(x_0)) = q'(x_0, \cdot)$ sublin., $q'(x_0, 0) = 0$ qed.

1.63 Die sublineare Ableitung $q^s(x_0, \cdot)$

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Def.: Sei $q \in Q$, $x_0 \in X$; $q^s(x_0, \cdot) \in Q$ sei def. durch

$$q^s(x_0, x) := R(q(x_0 + \cdot) - q(x_0))(x) \quad (x \in X)$$

$q^s(x_0, x)$ heißt "sublineare Ableitung von q in x_0 in Richtung x "

2 Lemma: Vor.: $q \in Q$, $x_0 \in X$: $q(x_0) \in \mathbb{R}$

Beh.: $\text{dom } q^s(x_0, \cdot) = C(\text{dom } q - x_0)$

3 Lemma: Vor.: $q \in Q$, $x_0 \in X$

Beh.: a) $(q \text{ konv.} \wedge q(x_0) \in \mathbb{R}) \implies q^s(x_0, \cdot) = q'(x_0, \cdot)$

b) $(q \text{ sublin.} \wedge q(x_0) \in \mathbb{R}) \implies (q \geq q'(x_0, \cdot) \wedge q(x_0) = q'(x_0, x_0))$

c) $q \text{ pos.hom.} \implies (\forall \alpha > 0: q^s(x_0, \cdot) = q^s(\alpha x_0, \cdot))$

d) $(p \in Q; p(x_0), q(x_0) \in \mathbb{R}) \implies$
 $\implies (p+q)^s(x_0, \cdot) \geq p^s(x_0, \cdot) + q^s(x_0, \cdot)$

e) $\text{co}(q)(x_0) \geq q(x_0) \in \mathbb{R} \implies q^s(x_0, \cdot) = (\text{co}(q))'(x_0, \cdot)$

f) $q^s(x_0, 0) \geq 0 \iff \text{co}(q)(x_0) \geq q(x_0)$

Beweise

Bew.: 3L:a) Klar nach 1.62, 11K

b) $\alpha > 0, x \in X \implies q(\alpha x) = q(x_0 + \alpha x - x_0) \geq q(x_0 + \alpha x) - q(x_0) \implies$
 $q(x) \geq \frac{1}{\alpha} (q(x_0 + \alpha x) - q(x_0))$, also nach a): $q \geq q'(x_0, \cdot)$.

c) $\alpha > 0 \implies q^s(\alpha x_0, \cdot) = R(q(\alpha x_0 + \cdot) - q(\alpha x_0)) =$

$$S \circ P(q(\alpha x_0 + \cdot) - q(\alpha x_0)) = S \circ P(q(x_0 + \cdot) - q(x_0)) = q^s(x_0, \cdot)$$

d) $(p+q)^s(x_0, \cdot) = R(p(x_0 + \cdot) - p(x_0) + q(x_0 + \cdot) - q(x_0)) \geq$

$$R(p(x_0 + \cdot) - p(x_0)) + R(q(x_0 + \cdot) - q(x_0)) = p^s(x_0, \cdot) + q^s(x_0, \cdot)$$

e) $q^s(x_0, \cdot) = R(q(x_0 + \cdot) - q(x_0)) \stackrel{1.44, 44L}{=} S \circ P \circ \text{co}(q(x_0 + \cdot) - q(x_0)) \stackrel{1.62, 4L}{=} S \circ P(\text{co}(q)(x_0 + \cdot) - \text{co}(q)(x_0)) = (\text{co}(q))'(x_0, \cdot)$

f) $q^s(x_0, 0) \geq 0 \stackrel{1.44, 44L}{\iff} \text{co}(q(x_0 + \cdot) - q(x_0))(0) \geq 0 \stackrel{1.62, 4L}{\iff}$

$$\text{co}(q)(x_0) - q(x_0) \geq 0 \stackrel{1.62, 4L}{\iff} \text{co}(q)(x_0) \geq q(x_0)$$

1.7 (Unteres) Minkowski-Funktional

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Def.: Sei $A \subset X$

$p_A \in Q_A$ sei def. durch $p_A(x) := \inf\{\alpha > 0, x \in \alpha A\}$

p_A heißt (unteres) Minkowski-Funktional von A

2 Lemma: Vor.: $A \subset X$

Beh.: a) $p_A \geq 0$, p_A pos.hom.

b) A konv. $\Rightarrow p_A$ sublin.

c) $A \subset B \subset X \Rightarrow p_A \geq p_B$

d) $\lambda \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow p_{\lambda A} = \frac{1}{\lambda} p_A$

3 Lemma: Vor.: $A \subset X$, $x \in X$

Beh.: a) A konv. $\Rightarrow p_{co(A \cup \{x\})} = p_{A \cup \{x\}}$

b) $p_{A \cup \{x\}}(x) = \begin{cases} p_A(x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

4 Lemma: Vor.: $p \in Q$ pos.hom., $M_1 := \{x \mid p(x) \leq 1\}$, $M_2 := \{x \mid p(x) \geq 1\}$

Beh.: a) $p_{M_1} = \max(p, 0)$, $p_{M_2} = \max(-p, 0)$

b) $p = p_{M_1} - p_{M_2}$

5 Lemma: Vor.: $A, B \subset X$

Beh.: $p_{A \cup B} = \min(p_A, p_B)$, $p_{A \cap B} \geq \max(p_A, p_B)$

6 Lemma: Vor.: $A, B \subset X$

Beh.: $(\forall \alpha \in]0, 1[: \alpha A \cap \alpha B \subset B) \Rightarrow p_{A \cap B} = \max(p_A, p_B)$

7 Lemma: Vor.: $A \subset X$

Beh.: $Sp_A = p_{co(A) \cup \{0\}} = p_{co(A \cup \{0\})}$

8 Lemma: Vor.: $p \in Q_A$ pos.hom. (M_1, M_2 siehe 4L)

Beh.: $Sp \leq p_{co(M_1) \cup \{0\}} - p_{co(M_2) \cup \{0\}}$

9 Satz: Vor.: $p \in Q_A$ def. durch $p := \sum_{i=1}^n \delta_A$, wobei $\delta \in \mathbb{R}_+^+, A \subset X$

Beh.: a) $Rp \in Q_A$, $\text{dom } Rp = D_A(A)$, $\text{dom } Rp = C(A)$

b) $\delta = 0 \Rightarrow (Rp = \delta_{D_A(A)}, Rp = \delta_{C(A)})$

c) $\delta > 0 \Rightarrow (Rp = \delta p_A, Rp = \delta p_{co(A) \cup \{0\}})$

10 Lemma: Vor.: $q \in Q$ pos.hom., $A \subset X, K \in \mathbb{R}^+$

Beh.: $(\forall x \in A : q(x) \leq K) \Leftrightarrow q \leq p_{K \cdot A}$

11 Lemma: Vor.: X top.VR über $\mathbb{R}$, $f \in X'$, $A \subset X : A \neq \emptyset$

Beh.: $f \not\geq -p_A \Rightarrow f \in X^*$

Beweise

Bew. 5L: $x \in X$ 1.Fall: $x \in \bigcup_{\alpha > 0} (A \cup B) \Rightarrow p_{A \cup B}(x) \geq \min(p_A, p_B)(x)$

2.Fall: $x \in \bigcup_{\alpha > 0} \alpha(A \cup B) : \exists \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\exists \alpha > 0 \left(\frac{x}{\alpha} \in A \cup B \wedge p_{A \cup B}(x) + \varepsilon > \alpha \right) \Rightarrow \left(\frac{x}{\alpha} \in A \vee \frac{x}{\alpha} \in B \right) \Rightarrow p_{A \cup B}(x) + \varepsilon >$

$\alpha \geq \min(p_A, p_B)(x) \Rightarrow p_{A \cup B} \geq \min(p_A, p_B) ;$

weiter: $p_A, p_B \geq p_{A \cup B} \Rightarrow \min(p_A, p_B) \geq p_{A \cup B} ;$

$p_A \wedge p_B \geq p_A, p_B \Rightarrow p_{A \wedge B} \geq \max(p_A, p_B)$ qed.

Bew. 6L: $\circ B d A \quad x \in \bigcup_{\alpha > 0} \alpha A \wedge x \in \bigcup_{\alpha > 0} \alpha B : \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in A \wedge p_A(x) + \varepsilon > \alpha \\ \exists \beta > 0 : \frac{x}{\beta} \in B \wedge p_B(x) + \varepsilon > \beta \end{array} \right\}$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{\max(\alpha, \beta)} = \frac{x}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\max(\alpha, \beta)} \in B, \frac{x}{\max(\alpha, \beta)} = \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\max(\alpha, \beta)} \in A \right)$

$\Rightarrow \max(\alpha, \beta) \geq p_{A \wedge B}(x) ;$ weiter $\max(p_A, p_B)(x) + \varepsilon \geq \max(\alpha, \beta),$

also $\max(p_A, p_B) \geq p_{A \wedge B}$ qed.

Bew. 7L: $p_A \geq p_{co(A) \cup \{o\}} \Rightarrow Sp_A \geq Sp_{co(A) \cup \{o\}} = Sp_{co(A \cup \{o\})} = p_{co(A) \cup \{o\}} \Rightarrow$

$Sp_A \geq p_{co(A) \cup \{o\}} ;$ weiter $A \subset \{x \mid p_A(x) \leq 1\} \subset \{x \mid Sp_A(x) \leq 1\} \ni o \Rightarrow$

$\Rightarrow co(A \cup \{o\}) \subset \{x \mid Sp_A(x) \leq 1\} \Rightarrow p_{co(A \cup \{o\})} \geq Sp_A \Rightarrow$

$\Rightarrow Sp_A = p_{co(A \cup \{o\})} = p_{co(A) \cup \{o\}}$ qed.

Bew. 8L: $p = p_{M_1} - p_{M_2} \Rightarrow p + p_{M_2} = p_{M_1} \Rightarrow Sp_{M_1} = S(p + p_{M_2}) \geq Sp + Sp_{M_2}$ (wegen

1.3h 1oL, 7L) $\Rightarrow$ Beh.

Bew. 9S: $Pp(x) = \inf \left\{ \alpha p\left(\frac{x}{\alpha}\right) \mid \alpha > 0 \right\} = \inf \left\{ \alpha p\left(\frac{x}{\alpha}\right) \mid \alpha > 0, x \in \alpha A \right\} =$

$\inf \left\{ \alpha \gamma \mid \alpha > 0, x \in \alpha A \right\} ;$ 1.Fall: $\gamma = 0 \Rightarrow$

$Pp(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \bigcup_{\alpha > 0} \alpha A = D_A(A)) \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow Spp(z) =$

$\inf \left\{ 1 \cdot \left((Pp) \circ x \right) \mid 1 \cdot x = z, \|I\| < \infty, x \in (\text{dom } Pp)^I \right\} = \begin{cases} 0 & (z \in C(A)) \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$

2.Fall: $\gamma > 0 \Rightarrow Pp(x) = \gamma p_A(x) \Rightarrow Spp(z) = \gamma p_{co(A) \cup \{o\}}(7L)$

Bew. 1oL: $r \in \mathbb{Q}$ sei def. durch $r := K1 + \delta_A$, also $q \leq r \Leftrightarrow q = Pq \leq Pr$

$\Leftrightarrow q \leq Kp_A = p_{\frac{1}{K}A}$ qed.

1.8 Oberes Minkowski-Funktional

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Def.: Sei $A \subset X$

$\bar{p}_A \in Q$ sei def. durch $\bar{p}_A(x) := \sup\{\alpha \mid \alpha \cdot o, x \in A\}$

$\bar{p}_A$ heißt oberes Minkowski-Funktional von A

2 Lemma: Vor.: $A \subset X$

Beh.: a) $\bar{p}_A$ pos.hom.

b) A konv. $\Rightarrow (-\bar{p}_A)$ subadd.

c) $A \subset B \subset X \Rightarrow \bar{p}_A \leq \bar{p}_B$

d) $\gamma \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \bar{p}_{A \cdot \gamma} = \frac{1}{\gamma} \cdot \bar{p}_A$

3 Lemma: Vor.: $p \in Q$ pos.hom., $N_1 := \{x \mid p(x) \geq 1\}$, $N_2 := \{x \mid p(x) \leq -1\}$

Beh.: $\bar{p}_{N_1}(x) = \begin{cases} p(x) & (p(x) > 0) \\ -\infty & (p(x) \leq 0) \end{cases} \quad (x \in X)$

$\bar{p}_{N_2}(x) = \begin{cases} -\infty & (p(x) \geq 0) \\ -p(x) & (p(x) < 0) \end{cases}$

4 Satz: Vor.: $A \subset X$

Beh.: a) $\forall x \neq o: S(-\bar{p}_A)(x) = -\bar{p}_{co(A)}(x)$

b) $S(-\bar{p}_A)(o) = 0 \Leftrightarrow o \notin co(A)$

$S(-\bar{p}_A)(o) = -\infty \Leftrightarrow o \in co(A)$

c) $\text{dom } S(-\bar{p}_A) = C(A)$

5 Satz: Vor.: $p \in Q$ def. durch $p := \gamma \cdot 1 + \delta_A^x$, wobei $\mathbb{R} \ni \gamma < 0, A \subset X$

Beh.: a) $\forall x \neq o: R p(x) = \gamma \bar{p}_{co(A)}(x)$

b) $R p(o) = 0 \Leftrightarrow o \notin co(A)$

$R p(o) = -\infty \Leftrightarrow o \in co(A)$

$\text{dom } R p = C(A)$

c) $P p = \gamma \bar{p}_A$

6 Lemma: Vor.: X top. VR über $\mathbb{R}$, $f \in X'$, $A \subset X: A \neq \emptyset$

Beh.: $f \geq \bar{p}_A \Rightarrow f \in X''$

7 Lemma: Vor.: $q \in Q$ pos.hom., $K \in \mathbb{R}^+, A \subset X$

Beh.: $(\forall x \in A: q(x) \geq K) \Leftrightarrow q \geq K \bar{p}_A$

Beweise

Bew. 2L:b) oBdA $x, y \in D_A(A)$ 1.Fall: $\bar{p}_A(x) = +\infty \vee \bar{p}_A(y) = +\infty$

oBdA $\bar{p}_A(x) = +\infty : \alpha > 0: x \in \alpha A \} \Rightarrow x+y \in \alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A \Rightarrow$
 $\exists \beta > 0: x \in \beta A \}$

$\bar{p}_A(x+y) \geq \alpha + \beta \Rightarrow \bar{p}_A(x+y) = +\infty$, also die Beh.

2.Fall: $\bar{p}_A(x), \bar{p}_A(y) \in \mathbb{R} : \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha > 0: \bar{p}_A(x) - \varepsilon < \alpha, x \in \alpha A \\ \exists \beta > 0: \bar{p}_A(y) - \varepsilon < \beta, y \in \beta A \end{array} \right\}$

$\Rightarrow x+y \in \alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A \Rightarrow \bar{p}_A(x+y) \geq \alpha + \beta > \bar{p}_A(x) + \bar{p}_A(y) - 2\varepsilon$

$\Rightarrow \bar{p}_A(x+y) \geq \bar{p}_A(x) + \bar{p}_A(y)$, also die Beh. qed.

Bew. 4S:a) b) $A \subset \{x | \bar{p}_A(x) \geq 1\} \subset \{x | S(-\bar{p}_A)(x) \leq -1\} =: N_2 \Rightarrow N_2 \text{ konv.}$

(denn: $x \in A \Rightarrow \bar{p}_A(x) \geq 1 \Rightarrow -\bar{p}_A(x) \leq -1 \Rightarrow S(-\bar{p}_A)(x) \leq -1$, außer-
dem $S(-\bar{p}_A)$ sublin.); also: $\text{co}(A) \subset N_2 \Rightarrow \bar{p}_{\text{co}(A)}(x) \leq \bar{p}_{N_2}(x) \stackrel{3L}{=}$

$= \begin{cases} -S(-\bar{p}_A)(x), & \text{falls } S(-\bar{p}_A)(x) < 0 \\ -\infty, & \text{falls } S(-\bar{p}_A)(x) \geq 0 \end{cases} \quad (x \in X)$

Weiter: $\text{Acco}(A) \Rightarrow \bar{p}_A \leq \bar{p}_{\text{co}(A)} \Rightarrow -\bar{p}_A \geq -\bar{p}_{\text{co}(A)} \Rightarrow$

$S(-\bar{p}_A) \geq S(-\bar{p}_{\text{co}(A)})$, wobei nach 1.31, 4L: $S(-\bar{p}_{\text{co}(A)})(o) =$

$\min(o, -\bar{p}_{\text{co}(A)}(o))$, weiter: $x \neq o \Rightarrow S(-\bar{p}_{\text{co}(A)})(x) =$

$-\bar{p}_{\text{co}(A)}(x)$. Nun: $x \neq o \wedge S(-\bar{p}_A)(x) \geq 0 \Rightarrow \bar{p}_{\text{co}(A)}(x) = -\infty$

$\Rightarrow S(-\bar{p}_A)(x) = +\infty = -\bar{p}_{\text{co}(A)}(x)$. Andererseits:

$x \neq o \wedge S(-\bar{p}_A)(x) < 0 \Rightarrow -\bar{p}_{\text{co}(A)}(x) \geq S(-\bar{p}_A)(x) \geq$

$S(-\bar{p}_{\text{co}(A)})(x) = -\bar{p}_{\text{co}(A)}(x) \Rightarrow S(-\bar{p}_A)(x) = -\bar{p}_{\text{co}(A)}(x) < 0$,
also a).

Weiter: $S(-\bar{p}_A)(o) = 0 \Rightarrow -\bar{p}_{\text{co}(A)}(o) = +\infty \Rightarrow o \notin \text{co}(A)$,

umgekehrt $o \notin \text{co}(A) \Rightarrow -\bar{p}_{\text{co}(A)}(o) = +\infty \Rightarrow$

$S(-\bar{p}_{\text{co}(A)})(o) = 0 \Rightarrow S(-\bar{p}_A)(o) = 0$, also b).

Nach Obigem: $\text{dom } S(-\bar{p}_A) = \{x | S(-\bar{p}_A)(x) \leq 0\} =$

$\{o\} \cup D_A(\text{co}(A)) = C(A)$; also c). qed.

Bew. 5S: $\text{Pp}(x) = \inf\{\alpha p(\frac{x}{\alpha}) | \alpha > 0, x \in \alpha A\} = \inf\{\alpha \gamma | \alpha o, x \in \alpha A\} =$

$\gamma \cdot \sup\{\alpha > 0 | x \in \alpha A\} = \gamma \cdot \bar{p}_A(x) = (-\gamma) \cdot (-\bar{p}_A)(x)$, also c). Weiter:

$\text{Rp} = \text{SPp} = S((- \gamma) \cdot (-\bar{p}_A)) = (-\gamma) S(-\bar{p}_A) \stackrel{4S}{=} a) b)$. qed.

Bew. 7L: $(\forall x \in A: q(x) \geq K) \Leftrightarrow q \geq -(-K1 + \delta_A) \Leftrightarrow -q \leq -K1 + \delta_A \stackrel{5S}{\Leftrightarrow}$

$-q \leq -K \bar{p}_A \Leftrightarrow q \geq K \bar{p}_A$ qed.

1.9 Halbstetige Funktionale

Allgemeine Vor.: X top. VR über $\mathbb{R}$

1 Def.: Sei $q \in Q$, $x_0 \in X$

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} q(x) := \sup_{u \in \underline{U}(x_0)} \inf q[U]$$

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0} q(x) := \inf_{u \in \underline{U}(x_0)} \sup q[U]$$

$$c) cl(q) := \lim_{x \rightarrow \cdot} q(x)$$

$$d) q \text{ uhstet. in } x_0 : \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = q(x_0)$$

$$e) q \text{ ohstet. in } x_0 : \Leftrightarrow \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} q(x) = q(x_0)$$

2 Lemma: Vor.: $p, q \in Q$; $x_0 \in X$

Beh.: a) $cl(q)$ uhstet.

$$b) cl(q) \leq q$$

$$c) p \leq q \Rightarrow cl(p) \leq cl(q)$$

$$d) q \text{ uhstet. in } x_0 \Leftrightarrow cl(q)(x_0) = q(x_0)$$

$$e) cl \circ cl = cl$$

$$f) cl(q) = \sup \{ p \in Q \mid p \leq q \wedge p \text{ uhstet.} \}$$

3 Lemma: Vor.: $q \in Q$; $(q_i)_{i \in I}$ Familie aus Q , $x_0 \in X$

Beh.: a) q pos.hom. $\Rightarrow cl(q)$ pos.hom.

b) q subadd. $\Rightarrow cl(q)$ subadd.

c) q konv. $\Rightarrow cl(q)$ konv.

d) $(\forall i \in I: q_i \text{ uhstet. in } x_0) \Rightarrow (\sup_{i \in I} q_i) \text{ uhstet. in } x_0$

Beweise

$$\text{Bew.: 3La): } x \in X, \alpha > 0 \xRightarrow{x \text{ top. VR}} cl(q)(\alpha x) = \sup_{u \in \underline{U}(\alpha x)} \inf q[U] = \sup_{u \in \underline{U}(x)} \inf q[\alpha U] = \alpha cl(q)(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: 3Lb): } x, y \in X \xRightarrow{x \text{ top. VR}} cl(q)(x+y) &= \sup_{u \in \underline{U}(x+y)} \inf q[U] = \\ &= \sup \{ \inf q[U_1 + U_2] \mid U_1 \in \underline{U}(x), U_2 \in \underline{U}(y) \} \stackrel{v_r}{\leq} \\ &= \sup \{ \inf q[U_1] + \inf q[U_2] \mid U_1 \in \underline{U}(x), U_2 \in \underline{U}(y) \} \stackrel{1.02, 6c)}{\leq} \\ &= \sup_{u_1 \in \underline{U}(x)} \inf q[U_1] + \sup_{u_2 \in \underline{U}(y)} \inf q[U_2] = cl(q)(x) + cl(q)(y) \end{aligned}$$

Bew.: 3Lc): Analog 3Lb)

1.10 Konjugierte Funktionale

Allgemeine Vor.: X l.c.s. über $\mathbb{R}$

1 Def.: Sei $q \in \mathcal{Q}$.

a) $q^* \in \mathcal{Q}(X^*)$, def. durch $q^*(x^*) := \sup_{x \in X} (\langle x, x^* \rangle - q(x))$,
heißt Konjugierte von q

b) $q^{**} \in \mathcal{Q}(X)$, def. durch $q^{**}(x) := \sup_{x^* \in X^*} (\langle x, x^* \rangle - q^*(x^*))$,
heißt zweite Konjugierte von q

2 Satz: Vor.: $q \in \mathcal{Q}_1$

Beh.: $q^{**} = q \iff q$ konv., uhstet.

Bew.: Die in Holmes [72, S.44-46] im einzelnen durchgeführten Beweisschritte gelten auch, wenn X nicht Hausdorff'sch, da der verwendete Trennungssatz auch in diesem Falle gilt.
(Allerdings ist der Holmes'sche Beweis unsauber geführt!)

KAPITEL 2

GRUNDPROBLEME

Übersicht:

In diesem Kapitel werden zwei Probleme, nämlich die Grundprobleme (GP) 1 und 2 formuliert und gelöst. Diesen (vom V. so genannten) Grundproblemen kommt eine grundlegende Bedeutung insofern zu, als sich viele Probleme der Funktionalanalysis (siehe z.B. Kap. 4) mit dem in Kap. 1 entwickelten Formalismus auf die Grundprobleme zurückführen und so nach einheitlichen Gesichtspunkten lösen lassen. Deshalb kommt es darauf an, möglichst viele Methoden zur Lösung dieser Grundprobleme zu entwickeln. Der V. möchte die hier entwickelte Methode die "Methode des Ersatzfunktionalen" nennen, die dabei zugrundeliegende Idee ist in 2.2, 2S bzw. 2.3, 2S und 2.3, 3K dargestellt, wobei als Ersatzfunktionale zumeist untere und obere Minkowski-Funktionale (siehe 1.7, 1.8) verwendet werden.

Bemerkungen zu 2.1:

1S ist der Kern der traditionellen Form des Satzes von Hahn-Banach, auf den alle weiteren in dieser Arbeit entwickelten Varianten des Satzes von Hahn-Banach (mittels eines geeigneten "Ersatzfunktionalen"!) zurückgeführt werden.

Der Teil " $\Leftarrow \Rightarrow$ " von 2S ist, abgesehen vom formalen Unterschied in der Definition von R_p und Agnew's $p^{(r)}$, schon bei Agnew [37] zu finden (Man beachte $p \in Q_1$!).

Bemerkungen zu 2.2:

Für spätere Anwendungen besonders wichtig ist die in GP 1 für q geforderte äußerst schwache Voraussetzung, nämlich " $q \in Q$ ". Dies hat zur Folge, daß in den Anwendungen der Lösungen von GP 1 lästige Vorüberlegungen wegfallen (Man stelle sich vor, in GP 1 würde als Voraussetzung z.B. " $q \in Q_4$ " stehen; dies würde sich so auswirken, daß z.B. zusätzlich " $q \in Q_4$ " auf den rechten Seiten der Behauptung von 2S, 3K, 4K, 6K usw.

stehen würde!)).

Aus 2S ergibt sich mit einem unteren Minkowski-Funktional als Ersatzfunktional das besonders wichtige 3K, aus dem 4K bis 10K (ausgenommen 5L) folgen, während sich mit einem oberen Minkowski-Funktional nur 11S ergibt. 2K wurde schon i.w. von Simons [68,K(3)] mit einem Trennungssatz bewiesen, der auch ein Beispiel dafür angibt, daß $2K \Leftarrow$ ohne die zusätzliche Voraussetzung $\dim(\text{dom } q) < \infty$ i.a. nicht richtig ist.

Man erkennt ohne Schwierigkeiten, daß 2.1, 2S in 3K enthalten ist. 4K läßt sich (mit etwas Mühe) auch aus dem Satz von Mazur-Orlicz [53, 2.41] ableiten.

Auf die (in der Einleitung erwähnten) Arbeiten von Weston [60] und Musielak-Orlicz [60] wird in den Bemerkungen zu 4.1 näher eingegangen.

Bemerkungen zu 2.3:

Für Grundproblem 2 gilt ebenfalls sinngemäß der erste Absatz der Bemerkungen zu 2.2. Aus 2S ergibt sich analog 2.2 mit einem oberen Minkowski-Funktional 4K. 5K läßt sich (analog 2.2, 4K) aus dem Satz von Mazur-Orlicz [53, 2.41] ableiten.

Es wurde kein Wert darauf gelegt, jede Aussage in 2.2 durch Ergänzen eines die Stetigkeit erzwingenden Zusatzes in 2.3 zu übernehmen. (Im Falle $X'' = X'$ können natürlich in 2.3 diese Zusätze weggelassen werden, z.B. also 3) in 2S; 2)b) und 3) in 3K usw.)

Für " X l.c.s." ergeben sich die Aussagen ab 2S; 2S läßt sich im Falle " X Hausdorffsch" mit 4.4, 2L auch aus der Theorie der konvexen bzw. konjugierten Funktionale ableiten (siehe Laurent [72, S. 342-344]).

Fan [56, Th. 13] löst i.w. Grundproblem 2 für normierte Räume; der etwas komplizierte Beweis benützt einen üblichen Trennungssatz. Mustad [59, Prop. 6] erweitert dieses Ergebnis auf lokalkonvexe lineare Hausdorff-Räume mit derselben Beweisidee und stellt dann in [60, Th. 1] fest, daß der Beweis einfacher mit dem Satz von Mazur-Orlicz [53, 2.41] geführt werden kann. Mustads Theorem 1 läßt sich auch ohne Schwierigkeiten mit 2.3, 5K und 1.41, 7L (mit $p_i := -\alpha_i^X + \delta_{\{x_i\}}, \alpha_i \in I := \Gamma$) beweisen.

Kaufman [66] gibt einen Satz an, mit dem er den Satz von Mazur-Orlicz [53, 2.41] und den üblichen Satz von Hahn-Banach (Dunford-Schwartz [53, 10Th.]) beweisen kann; auf die Grundprobleme ist er direkt nicht anwendbar, da für die in diesen Satz eingehende Funktionale (insbesondere ω !) der Wert $+\infty$ ausgeschlossen ist.

Die Aussagen in 2.3 erscheinen dem V. etwas global; wünschenswert wäre eine bessere Differenzierung nach spezielleren topologischen Eigenschaften von X wie z.B. " X (B)-Raum" oder allgemeiner " X tonneliert" o.ä.

Bemerkungen zu 2.4:

1S wird besonders interessant unter der zusätzlichen Voraussetzung " $\exists f \in X': f \leq q$ ", denn dann ist $f = F(Rq, p_A)$ nach 3.1, 1S; somit $\inf \{ t(q \circ x) + \alpha + \tau(q \circ y) + \beta \mid t, x, \alpha, \tau, y, \beta \text{ siehe } 1S, b) \} = 0$. Eine Berechnung von $f(x)$ nach 1S bietet sich auch in den Fällen an, wo $C(\text{dom } q) = X$ und ein günstiges A vorliegt, jedoch q schlecht zu handhaben ist (obwohl für $C(\text{dom } q) = X$ $A := \{0\}$ gesetzt werden könnte!).

2.1 Der Satz von Hahn-Banach

1 Satz (Hahn-Banach) Vor.: X VR über $\mathbb{R}$, $p \in Q_0$ sublin.

Beh.: $\exists f \in X': f \leq p$

Bew.: Dunford-Schwartz [58, S. 62/63, 10 Th.]

2 Satz: Vor.: X VR über $\mathbb{R}$, $p \in Q_0$.

Beh.: $(\exists f \in X': f \leq p) \stackrel{A}{\iff} R p(o) \geq o \stackrel{B}{\iff} \text{co}(p)(o) \geq o$

Bew.: $\stackrel{A}{\implies} f \leq p \implies Rf = f \leq R p \implies R p(o) \geq o$

Bew.: $\stackrel{B}{\implies} R p(o) \geq o$, $\text{dom } R p = X \stackrel{A, 1.4, 1.11}{\implies} R p[X] \subset \mathbb{R} \implies R p \in Q_0 \text{ sublin.}$
 $\stackrel{A}{\implies} (\exists f \in X': f \leq R p \leq p)$

Bew.: $\stackrel{B}{\implies} 1.41, 11K \text{ mit } A := \{0\}; 1.62, 2D.$

2.2 Grundproblem 1, Lösung und Folgerungen

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Def. des Grundproblems 1 (GP 1)

gegeben: $q \in Q$

gesucht: $f \in X' : f \leq q$

2 Hauptsatz: Vor.: $q \in Q$

Beh.: $(\exists f \in X' : f \leq q) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) X = C(\text{dom } q) - C(\text{dom } p) \\ 2) Rq \geq -Rp \end{cases}$

$\stackrel{2}{\Rightarrow} (\exists f \in X' : -Rp \leq f \leq Rq)$

Bew.: $\stackrel{1}{\Rightarrow}$: $p := -f$ tut's!

Bew.: $\stackrel{1}{\Leftarrow}, \stackrel{2}{\Rightarrow}$: $F(Rq, R(p \circ j))$ sublin. (nach 1.41, 3L, 1.51, 3L); weiter nach 1.51, 2L, 1.41, 3L und Vor.:
 $\text{dom } F(Rq, R(p \circ j)) = \text{dom } Rq + \text{dom } R(p \circ j) = C(\text{dom } q) - \text{dom } Rp = C(\text{dom } q) - C(\text{dom } p) = X$. Nach 1.51, 2L:
 $F(Rq, R(p \circ j))(o) \geq o \Leftrightarrow Rq + Rp \geq o' \stackrel{1.02, 6.}{\Leftrightarrow} Rq \geq -Rp$,
 also nach 1.31, 13L: $F(Rq, R(p \circ j)) \in Q$ sublin. $\stackrel{2.4, 25}{\Rightarrow}$
 $(\exists f \in X' : f \leq F(Rq, R(p \circ j))) \stackrel{1.51, 3L}{\Rightarrow} (f \leq Rq \leq q, f \leq R(p \circ j))$
 $\Rightarrow f \circ j \leq Rp \Rightarrow f \geq -Rp$ qed.

3 Korollar: Vor.: wie 2S

Beh.: $(\exists f \in X' : f \leq q) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) X = C(\text{dom } q) - C(A) \\ 2) Rq \geq -p_A \end{cases}$

$\stackrel{2}{\Rightarrow} (\exists f \in X' : -p_A \leq f \leq Rq)$

Bew.: $\stackrel{1}{\Leftarrow}, \stackrel{2}{\Rightarrow}$: Benütze 2S mit $p := p_A$, dann ist nach 1.7, 9S $\text{dom } p = C(A)$, $Rp_A = p_A$.

Bew.: $\stackrel{1}{\Rightarrow}$: $A := \{x \mid f(x) \geq -1\} \Rightarrow o \in A$ konv. absorb.

$\Rightarrow$ 1) erfüllt! Weiter nach 1.7, 4L: $p_A = \max(-f, o')$
 $\Rightarrow Rq \geq f \geq -p_A$ qed.

4 Korollar: Vor.: wie 2S

Beh.: $(\exists f \in X' : f \leq q) \Leftrightarrow (\exists A \subset X(A \text{ konv. absorb.}, Rq \geq -p_A)$

Bew.: siehe Bew. 3K bzw. 3K

5 Lemma: Vor.: wie 2S

Beh.: $(\exists f \in X' : f \leq q) \Leftrightarrow (\exists M[X(\text{dom } q \subset M) \exists f_o \in M' (\hat{f}_o \leq q))$

Bew.: $\Rightarrow$: $f_o := f|_{\langle \text{dom } q \rangle}$, $M := \langle \text{dom } q \rangle$ tut's!

Bew.: $\Leftarrow$: $\exists S[X : X = M \oplus S ; f \in X'$ sei def. durch

$f(x_1 + x_2) := f_o(x_1) \quad (x_1 \in M, x_2 \in S)$. Nun: $x \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists x_1 \in M) \exists x_2 \in S: x = x_1 + x_2$ 1. Fall: $x \in \text{dom } q \Rightarrow x_2 \in M \Rightarrow x_2 = 0$
 $\Rightarrow x = x_1 \Rightarrow f(x) \leq q(x)$. 2. Fall: $x \notin \text{dom } q \Rightarrow f(x) \leq q(x)$ qed.

6 Korollar: Vor.: wie 2S, zusätzlich: $\exists V[X: X = C(\text{dom } q) + V$

Beh.: $(\exists f \in X': f \leq q) \Leftrightarrow (\exists f_0 \in V': f_0 \leq \bigvee Rq)$

Bew.: $\Leftarrow$: $A := f_0^{-1}[-1 + \mathbb{R}_0^+]$ $\stackrel{1.3.5L}{=} \{o \in A \text{ konv.}, V = C(A),$
 $p_A|V = \max(-f_0, o')\}$; nun: $Rq \geq f_0 \geq \min(f_0, o') =$
 $= -\max(-f_0, o') = -p_A|V$, also nach 3K die Beh.

7 Korollar: Vor.: wie 2S, zusätzlich: $\exists z \in X: \langle C \rangle = C - C(\{z\})$,
wobei $C := C(\text{dom } q)$

Beh.: $(\exists f \in X': f \leq q) \Leftrightarrow (Rq(o) \geq o, Rq(z) > -\infty)$

Bew.: $\Leftarrow$: Sei $Y := \langle \text{dom } q \rangle, p := Rq|Y \Rightarrow \text{dom } p =$
 $\{x \in Y \mid Rq(x) < \infty\} = Y \cap \text{dom } Rq = C(\text{dom } q)$; zu zeigen

nach 5L: $(\exists f_0 \in Y': f_0 \leq p)$. Fall $z = o$: Nach 2S klar!

Fall $z \neq o$: $-z = o - z \in Y \Rightarrow z \in Y$; oBdA $Rq(z) \geq -1$;

Sei $A := \text{co}(\{o, z\}) \stackrel{1.3.5L}{\Rightarrow} p_A = p|_{\{o, z\}} \Rightarrow (\forall y \in Y:$

$p_A(y) = \begin{cases} \alpha (y = \alpha z, \alpha \geq 0) \\ +\infty \text{ sonst} \end{cases}$); nun: $\alpha \geq 0 \Rightarrow p(\alpha z) \geq \alpha p(z) \geq$

$-\alpha = -p_A(\alpha z)$, also nach 3K die Beh.

8 Korollar: Vor.: wie 2S, zusätzlich: $\exists A \subset X(\dim \langle A \rangle < \infty, \langle C \rangle = C + A)$,
wobei $C := C(\text{dom } q)$.

Beh.: $(\exists f \in X': f \leq q) \stackrel{4}{\Leftrightarrow} (\forall x \in C: Rq(x) > -\infty) \Leftrightarrow Rq \in Q_A$

Bew.: $\Leftarrow$: Nach 1.1, 5L: $\exists z \in C: \langle C \rangle = C - C(\{z\}) \stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow}$
 $(Rq(o) > -\infty, Rq(z) > -\infty) \Rightarrow$ Beh.

9 Korollar: Vor.: wie 2S, zusätzlich: $\dim \langle \text{dom } q \rangle < \infty$

Beh.: wie 8K

Bew.: 8K

10 Korollar: Vor.: wie 2S, zusätzlich: $\exists K \subset X(K \text{ konv. Kegel,}$
 $\langle \text{dom } q \rangle = C(\text{dom } q) - K, C(\text{dom } q) \cap K = \{o\})$

Beh.: $(\exists f \in X': f \leq q) \Leftrightarrow Rq(o) \geq o$

Bew.: $\Leftarrow$: $Y := \langle \text{dom } q \rangle \stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow} K \subset Y$; zu zeigen nach 5L:
 $(\exists f_0 \in Y': f_0 \leq p)$, wobei $p := Rq|Y$. Wegen $p_K = \delta_K$ folgt
dies aus 3K und Vor.

11 Satz: Vor.: wie 2S, zusätzlich: $\exists A \subset X(o \notin A \text{ konv.})$ mit

1) $X = C(\text{dom } q) - C(A)$

2) $Rq \geq \bar{p}_A, Rq(o) \geq o$

Beh.: $\exists f \in X': \bar{p}_A \leq f \leq Rq \leq q$

Bew.: Benütze 2S; 1.3, 5S mit $p(x) := \begin{cases} -\bar{p}_A(x) & (x \neq o) \\ 0 & (x = o) \end{cases}$

2.3 Grundproblem 2, Lösung und Folgerungen

Allgemeine Vor.: X top. VR über $\mathbb{R}$

1 Def. des Grundproblems 2 (GP 2)

gegeben: $q \in Q$

gesucht: $f \in X^*: f \leq q$

2 Hauptsatz: Vor.: $q \in Q$

$$\text{Beh.: } (\exists f \in X^*: f \leq q) \stackrel{1}{\iff} \begin{cases} \exists p \in Q \text{ mit} \\ 1) X = C(\text{dom } q) - C(\text{dom } p) \\ 2) Rq \geq -Rp \\ 3) \overline{\{x \mid Rp(x) \leq 1\}} \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\stackrel{2}{\iff} (\exists f \in X^*: -Rp \leq f \leq Rq)$$

Bew.: $\stackrel{4}{\implies}$: wie Bew. zu 2.2, 2S, mit $p := -f = Rp$, also 1), 2) erfüllt! Weiter: $\overline{\{x \mid -f(x) \leq 1\}} = \overline{\{x \mid f(x) \geq -1\}} \neq \emptyset$, also 3) erfüllt.

Bew.: $\stackrel{1}{\impliedby} \stackrel{A}{\implies}$: Nach Bew. zu 2.2, 2S gilt:

$\exists f \in X^*: -Rp \leq f \leq Rq$; nun: $\exists U \in \mathcal{U}(o) \exists x_o \in X_o + U \subset \{x \mid Rp(x) \leq 1\}$, also: $x \in U \implies Rp(x_o + x) \leq 1 \implies -f(x_o + x) \leq 1 \implies f(x) \geq -f(x_o) - 1$; somit nach 1.61, 3L: $f \in X^*$ qed.

3 Korollar: Vor.: wie 2S

$$\text{Beh.: } (\exists f \in X^*: f \leq q) \stackrel{1}{\iff} \begin{cases} \exists A, B \subset X (o \in A \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 1) X = C(\text{dom } q) - C(A) \\ 2) a) Rq \geq -p_A, b) p_{-B} \geq F(Rq, p_A) \\ 3) \overline{\text{co}(A \cup B)} \neq \emptyset \end{cases}$$

Bew.: siehe "Bew. $\implies$ " von 2.2, 3K mit $B := \emptyset$, was die Richtung " $\implies$ " betrifft.

Zu $\stackrel{2}{\impliedby}$: Nach 2.2, 3K und Vor. 1), 2) a) gilt:

$$(\exists f \in X^*: f \leq F(Rq, p_A) \leq q) \stackrel{1.7, 5L}{\implies} f \leq \min(p_A, p_{-B}) = p_{-(A \cup B)} \stackrel{1.7, 7L}{\implies} Rf = f \leq Rp_{-(A \cup B)} = p_{-\text{co}(A \cup B)} \stackrel{1.4, 3L}{\implies} f \in X^*: f \leq q \text{ qed.}$$

4 Korollar: Vor.: wie 2S, zusätzlich: $\exists A \subset X (o \in A \text{ konv.})$ mit

$$\begin{cases} 1) X = C(\text{dom } q) - C(A) \\ 2) Rq \geq \bar{p}_A, Rq(o) \geq o \\ 3) \bar{A} \neq \emptyset \end{cases}$$

Beh.: $\exists f \in X^*: \bar{p}_A \leq f \leq Rq \leq q$

Bew.: Benütze 2S mit $p(x) := \begin{cases} -\bar{p}_A(x) & (x \neq o) \\ o & (x = o) \end{cases} \stackrel{1.9, 5S}{\implies}$

($Rp = p, C(\text{dom } p) = C(A)$); weiter gilt wegen 2) $Rq \geq -Rp$, nun: $x \in A \implies \bar{p}_A(x) \geq 1 \implies -\bar{p}_A(x) \leq -1 \implies p(x) \leq -1$, somit nach 3): $\overline{\{x \mid p(x) \leq -1\}} \neq \emptyset$ qed.

5 Korollar: Vor.: wie 2S

Beh.: $(\exists f \in X: f \leq q) \Leftrightarrow (\exists U \in \underline{U}(o): U \text{ konv. } Rq \geq -p_u)$

Bew.: $\Rightarrow$: wie "Bew. $\Leftarrow$ " zu 2.2, 3K mit $U := \{x \mid f(x) \geq -1\}$

Bew.: $\Leftarrow$: 3K mit $A := U$, $B := \emptyset$.

6 Korollar: Vor.: wie 2S

Beh.: $(\exists f \in X: f \leq q) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists A \subset X (o \in A \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 1) X = C(\text{dom } q) - C(A) \\ 2) Rq \geq -p_A \\ 3) A \neq \emptyset \end{cases}$

Bew.: 5K bzw. 3K mit $B := \emptyset$.

7 Korollar: Vor.: wie 2S

Beh.: $(\exists f \in X: f \leq q) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists A \subset X (o \in A \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 1) A \cap C(\text{dom } q) \neq \emptyset \\ 2) Rq \geq -p_A \end{cases}$

$\Rightarrow (\exists f \in X: -p_A \leq f \leq q)$

Bew.: 5K bzw. 6K (wegen 1) $\Rightarrow X = C(\text{dom } q) - C(A)$

8 Korollar: Vor.: wie 2S

Beh.: $(\exists f \in X: f \leq q) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists B \subset X (B \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1) B \cap C(\text{dom } q) \neq \emptyset \\ 2) Rq(o) \geq 0, Rq \geq -p_B \end{cases}$

Bew.: $\Rightarrow$: 7K mit $B := A$

Bew.: $\Leftarrow$: Sei $A := co(B \cup \{o\}) \xrightarrow{4.31, 41} (p_A = p_{B \cup \{o\}}, Rq \geq -p_A) \xrightarrow{3K} \text{Beh.}$

9 Satz: Vor.: X l.c.s. über $\mathbb{R}$, $q \in Q$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent

a) $\exists f \in X: f \leq q$

b) $\lim_{x \rightarrow o} Rq(x) > -\infty$

c) $Rq(o) \geq 0$, Rq uhtet. in o

d) $\exists x_o \in X: Rq(x_o) \in \mathbb{R}$, Rq uhtet. in x_o .

Bew.: a) $\Rightarrow$ b): Nach Vor.: $f \leq Rq \Rightarrow \lim_{x \rightarrow o} Rq(x) \geq f(o) = o > -\infty$.

Bew.: b) $\Rightarrow$ c): Nach 1.9, gilt: $\lim_{x \rightarrow o} Rq(x) = c1 \cdot Rq(o) > -\infty$, $c1 \cdot Rq$ sublin. $\xrightarrow{4.31, 41} c1 \cdot Rq(o) \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow o} Rq(x) = c1 \cdot Rq(o) = Rq(o) = 0$, also c).

Bew.: c) $\Rightarrow$ d): $x_o := o$ tut's (wegen $Rq(o) = 0$).

Bew.: d) $\Rightarrow$ a): $(\exists K \in \mathbb{R}: Rq(x_o) > K) \xrightarrow{V_{av}} (\exists U \in \underline{U}(o): U \text{ konv.})$

$\forall x \in U: Rq(x_o + x) \geq K$, also: $x \in U \Rightarrow Rq(x) + Rq(x_o) \geq Rq(x_o + x) \geq$

$\geq K \implies Rq(x) \geq -(Rq(x_0) - K)$, somit nach 1.7, 10L:
 $Rq \geq -(Rq(x_0) - K) p_u \stackrel{SK}{\implies} (\exists f \in X: f \leq q) \text{ qed.}$

10 Korollar: Vor.: wie 9S, zusätzlich: $x_0 \in X$

Beh.: $(\exists f \in X: f \leq q \wedge f(x_0) = Rq(x_0)) \iff \begin{cases} Rq(x_0) \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (Rq)'(x_0, x) > -\infty \end{cases}$

Bew.: Sei $f \in X$, dann gilt nach 1.41, 17L:

$(f \leq q \wedge f(x_0) = Rq(x_0)) \iff (f \leq (Rq)'(x_0, \cdot) \wedge Rq(x_0) \in \mathbb{R})$,
 also nach 9S die Beh.

11 Korollar: Vor.: wie 9S

Beh.: $(\exists f \in X: f \leq q) \iff (\exists M \exists X (\text{dom } q \subset M) \exists f_0 \in M^* (\hat{f}_0 \leq q))$

Bew.: $\Leftarrow$: Nach 4.2, 3K gilt: $(\exists f \in X: f|_M = f_0)$, also
 $f \leq q$.

12 Satz: Vor.: X l.c.s. über $\mathbb{R}$, $q \in Q$, $W := \langle \text{dom } q \rangle$

Beh.: $(\exists f \in X: f \leq q) \iff \begin{cases} \exists A, B \ W (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 1) \ W = C(\text{dom } q) - C(A) \\ 2) a) Rq \geq -p_A, b) p_B \geq F(Rq, p_A) \\ 3) \overline{\text{co}(A \cup B)} \neq \emptyset \text{ (" " relativ } W) \end{cases}$

Bew.: Nach 11K, gilt: $(\exists f \in X: f \leq q) \iff (\exists f_0 \in \langle \text{dom } q \rangle^*: \hat{f}_0 \leq q)$,
 also nach 3K die Beh.

2.4 Bemerkung zur numerischen Berechnung von $f(x_0)$

1 Satz: Vor.: $X \text{ VR über } \mathbb{R}, q \in Q, x_0 \in X,$

$$\begin{aligned} & \exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit} \\ & 1) X = C(\text{dom } q) - C(A) \\ & 2) Rq \geq -p_A \end{aligned}$$

Beh.: a) $\exists f \in X': f \leq q$

$$\begin{aligned} & b) \forall I (|I| < \infty) \forall J (|J| < \infty) \forall t \in \mathbb{R}^+ \forall \tau \in \mathbb{R}^+ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in (\text{dom } q)^I \\ & \quad \forall y \in (\text{dom } q)^J : tx - x_0 \in \alpha A, \tau y + x_0 \in \beta A \implies \\ & \implies t(q \circ x) + \alpha \geq f(x_0) \geq -(\tau(q \circ y) + \beta) . \end{aligned}$$

Bew.: a) Klar nach 2.2, 3K.

Bew.: b) Nach 2.2, 3K Bew. gilt: $F(Rq, p_A) \geq f$, also:

$$\begin{aligned} & F(Rq, p_A)(x_0) \geq f(x_0), F(Rq, p_A)(-x_0) \geq f(-x_0), \\ & \text{somit: } F(Rq, p_A)(x_0) \geq f(x_0) \geq -F(Rq, p_A)(-x_0), \\ & \text{also nach 1.51, 5L die Beh. qed.} \end{aligned}$$

2 Beispiel: $X := \mathbb{R}, q(x) := \begin{cases} +\infty & (x > 1) \\ x & (x \leq 1) \end{cases}, A := [-1, 1], x_0 := 2; x \in X$

$\implies Rq(x) \geq x \geq -|x| = -p_A(x)$, also: Vor. von 1S erfüllt.

$t := 1, |I| = 1, \alpha := 1 : x \leq 1 \wedge x - 2 \in [-1, 1]$, also mit $x := 1$:

$2 \geq f(2)$;

$\tau := 1, |J| = 1, \beta > 0 : \frac{x+2}{\beta} \in [-1, 1] \wedge x \leq 1$, mit $\beta := 1, x := -3$

also: $f(2) \geq 2$; somit $\underline{f(2) = 2}$.

(Dies ist klar, da $(\forall x \in X: Rq(x) = Pq(x) = x)$, somit $f = Rq$!)

3 Beispiel: $X := \mathbb{R}, q(x) := e^x, x_0 := 1, A := [-1, 1]$; also: $Rq \geq 0 \geq$

$-| \cdot | = -p_A$, somit: Vor. von 1S erfüllt!

$|I| = 1, t > 0, \alpha > 0, x \in \mathbb{R} : \frac{tx-1}{\alpha} \in [-1, 1]$; mit $\alpha := 1, x := 0$,

$t \downarrow 0$ ergibt sich: $1 \geq f(1)$.

$|J| = 1, \tau > 0, \beta > 0, y \in \mathbb{R} : \frac{y\tau+1}{\beta} \in [-1, 1]$; mit $y := \frac{1}{\tau}(-\beta-1)$,

$\beta \downarrow 0, \tau \downarrow 0$ ergibt sich: $f(1) \geq 0$; somit: $\underline{1 \geq f(1) \geq 0}$.

KAPITEL 3

EINDEUTIGKEITSFRAGEN ZU DEN GRUNDPROBLEMEN

Übersicht:

In diesem Kapitel werden Eindeutigkeitskriterien für Grundproblem 1 und 2 entwickelt. Die Bedeutung solcher Kriterien ergibt sich aus der Bedeutung der Grundprobleme (siehe Übersicht zu Kapitel 2).

Bemerkungen:

1S ist ein wohlbekannter Satz. In Verbindung mit dem oben erwähnten Formalismus leistet er in vielen Eindeutigkeitsfragen gute Dienste (siehe 3.2, Bsp.5 (ein Satz von Shukla [66])).

In 2S wurde als Beweisidee die Methode des Ersatzfunktionalis verwendet. 3K ergibt sich aus 2S. 4K ist ein hinreichendes Kriterium für (E_4) , das nach 6K im Falle $C(\text{dom } q) = X$ auch notwendig ist. In 3.2 werden einige einfache Beispiele untersucht!

Soweit dom V. bekannt, werden Eindeutigkeitsfragen zu den Grundproblemen in der Literatur nur indirekt über die Untersuchung der eindeutigen Fortsetzbarkeit von linearen bzw. stetigen linearen Funktionalen (f Fortsetzung von f_0 mit $f \leq p$) untersucht.

Dabei ist p bei Taylor [39], Foguel [58], Phelps [60], Shukla [66], Fullerton-Braunschweiger [66], Poulsen [66], Racine [68] eine Norm, bei Holmes [71] ein konvexes stetiges Funktional ϵQ , also sehr viel stärkere Forderungen als $q \in Q$ (q sublin., $q(0) \leq 0$). Speziell für $f: 0 \rightarrow 0$, also Grundproblem 1 bzw. 2, lassen diese nicht-trivialen Untersuchungen keine Schlußfolgerungen zu (oder nur triviale). Die Bedingungen in 2S, 3K und 5S sind nicht einfach zu verifizieren. Vielleicht führen weitere Untersuchungen zu befriedigenderen Ergebnissen.

3.1 Eindeutigkeitskriterien zu den Grundproblemen.

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

Abkürzungen: $(E_1): \forall f, g \in X': f, g \leq q \implies f = g$

$(E_2): \forall f, g \in X': f, g \leq q \implies f = g$ (falls X top. VR)

1 Satz: Vor.: $p \in Q_0$ sublin.

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\exists f \in X': f \leq p$

(b) $p \in X'$

(c) $p + p \cdot j = 0'$

Bew.: (a) $\implies$ (b): $x_0 \in X \implies (\exists h \in X': h \leq p \wedge h(x_0) = p(x_0))$

$\stackrel{(a)}{\implies} h = f$, also $f = p \in X'$

Bew.: (c) $\implies$ (a): Ann.: $(\exists h, g \in X': h, g \leq p \wedge h \neq g) \implies$

$(\exists x_0 \in X: g(x_0) < h(x_0)) \implies g(-x_0) \leq p(-x_0) \implies -p(-x_0) \leq g(x_0) < h(x_0) \leq p(x_0) \quad \forall!$ (zu (c)!)

2 Satz: Vor.: X top. VR über $\mathbb{R}$, $q \in Q$

$M_1 := \{x \mid Rq(x) \leq 1\}$, $M_2 := \{x \mid Rq(x) \geq -1\}$

Beh.: $(E_2) \iff \left\{ \begin{array}{l} (\forall U \in \underline{U}(0) (U \text{ konv.}, M_1 \subset U) \forall x \notin U \\ (co(U \cup \{x\}) \subset -M_2 \implies F(Rq, p_U)(x) \leq 1) \end{array} \right\}$

Bew.: $\implies$: Ann.: $\exists U_0 \in \underline{U}(0) (U_0 \text{ konv.}, M_1 \subset U_0) \exists x_0 \notin U_0$

$(co(U_0 \cup \{x_0\}) \subset -M_2 \wedge F(Rq, p_{U_0})(x_0) > 1)$

Sei $U_1 := co(U_0 \cup \{x_0\}) \implies U_1 \subset -M_2 \stackrel{1.7, 61}{\implies} \max(-Rq \circ j, 0') \leq p_{U_1}$

$\implies Rq \geq -p_{U_1} \geq -p_{U_0}$, also nach 2.3, 5K; 1S und Vor.:

$F(Rq, p_{U_1}), F(Rq, p_{U_0}) \in X': F(Rq, p_{U_1}) \leq F(Rq, p_{U_0}) \implies$

$F(Rq, p_{U_1}) = F(Rq, p_{U_0})$, jedoch: $F(Rq, p_{U_0})(x_0) > 1$,

$F(Rq, p_{U_1})(x_0) \leq 1 \quad \forall!$ qed.

Bew.: $\Leftarrow$: Sei $f, g \in X': f, g \leq q; U_1 := \{x \mid f(x) \leq 1\}$,

$U_2 := \{x \mid g(x) \leq 1\}$, also: $U_1, U_2 \in \underline{U}(0)$ konv., $M_1 \subset U_1$, $U_2 \subset -M_2$

$p_{U_1} = \max(f, 0')$, $p_{U_2} = \max(g, 0')$

$\stackrel{1.7, 61}{\implies} (U_1 \cap U_2 \in \underline{U}(0) \text{ konv.}, M_1 \subset U_1 \cap U_2 \subset -M_2, p_{U_1 \cap U_2} = \max(p_{U_1}, p_{U_2}) = \max(f, g, 0'))$

Sei $U := U_1 \cap U_2$, nun: $x \in U_1 \implies co(U \cup \{x\}) \subset U_1 \subset -M_2 \implies$

$F(Rq, p_U)(x) \leq 1$, also nach 1.61, 1L: $F(Rq, p_U) \leq p_{U_1}$,

ebenso $F(Rq, p_U) \leq p_{U_2} \implies (p_{U_1} \geq F(g, p_U) = g, p_{U_2} \geq F(f, p_U) = f)$

$\implies (\max(f, 0') \geq g, \max(g, 0') \geq f) \implies \max(f, 0') = \max(g, 0')$

$\implies f = \max(f, 0') - \max(-f, 0') = \max(g, 0') - \max(-g, 0') = g$ qed.

3 Korollar: Vor.: X VR über $\mathbb{R}$, $q \in Q$; M_1, M_2 wie "2S"

Beh.: $(E_1) \Leftrightarrow (\forall A \subset X (M_1 \subset A \text{ konv., absorb.}) \forall x \notin A$
 $(\text{co}(A \cup \{x\}) \subset -M_2 \Rightarrow F(Rq, p_A)(x) \leq 1))$

Bew.: Man betrachte $(X, \tau(X, X'))$, dann ist
 $\{A \subset X \mid A \text{ konv. absorb.}\} = \{U \in \mathcal{U}(0) \mid U \text{ konv.}\}$, also:
 2S ergibt die Beh.

4 Korollar: Vor.: wie 3K, zusätzlich: $-M_2 \subset M_1$

Beh.: (E_1)

1. Bew.: 3K

2. Bew.: Sei $f, g \in X'$: $f, g \leq q$, also: $x: g(x) \leq 1 \Rightarrow$
 $g(-x) \geq -1 \Rightarrow Rq(-x) \geq -1 \stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow} Rq(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1$,
 somit nach 1.7, 4L: $\max(g, o') \geq \max(f, o')$, ebenso
 $\max(f, o') \geq \max(g, o') \Rightarrow \max(f, o') = \max(g, o') \Rightarrow$
 $f = g$. qed.

5 Satz: Vor.: wie 3K

Beh.: $(E_1) \Leftrightarrow (\forall A \subset X (0 \in A \text{ konv., } X = C(\text{dom } q) + C(A)) \forall x \notin A$
 $(\text{co}(A \cup \{x\}) \subset -M_2 \Rightarrow F(Rq, p_A)(x) \leq 1))$

Bew.: $\Rightarrow$: Ann.: $\exists A_0 \subset X (0 \in A_0 \text{ konv., } X = C(\text{dom } q) + C(A_0)) \exists x_0 \notin A$
 $(\text{co}(A_0 \cup \{x_0\}) \subset -M_2 \wedge F(Rq, p_{A_0})(x_0) > 1)$

Sei $A_1 := \text{co}(A_0 \cup \{x_0\}) \Rightarrow A_1 \subset -M_2 \stackrel{1.7, 4L}{\Rightarrow} Rq \geq -p_{A_1} \geq -p_{A_0}$, also:
 $F(Rq, p_{A_1}) \in X'$, $F(Rq, p_{A_0}) \in X'$ mit $F(Rq, p_{A_1}) \leq F(Rq, p_{A_0}) \Rightarrow$
 $F(Rq, p_{A_1}) = F(Rq, p_{A_0})$, jedoch: $F(Rq, p_{A_1})(x_0) \leq 1$,
 $F(Rq, p_{A_0})(x_0) > 1$ W! qed.

Bew.: $\Leftarrow$: 3K

6 Korollar: Vor.: wie 3K, zusätzlich: $C(\text{dom } q) = X$

Beh.: $(E_1) \Leftrightarrow -M_2 \subset M_1$

Bew.: 4K, 5S mit $A := \{0\}$

3.2 Beispiele zu den Eindeutigkeitskriterien

Bsp. 1: $X := \mathbb{R}$, $q(x) := \begin{cases} -\frac{1}{x} & (x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ 0 & (x > 0) \end{cases}$

$N_1 := \{x \mid q(x) \leq 1\} =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[\implies \text{co}(N_1) = X \subset M_1 \implies X = M_1$, also nach 3.1, 4K: (E_1) .

Bsp. 2: $X := \mathbb{R}^2$, $q(x, y) := \begin{cases} \frac{x}{y} & (y > 0) \\ 0 & (y \leq 0) \end{cases}$

$N_1 := \{(x, y) \mid q(x, y) \leq 1\} \supset \{(x, y) \mid y \leq 0\} \cup \{(1, y) \mid y \geq 1\} \implies \text{co}(N_1) = X \subset M_1 \subset X$, also nach 3.1, 4K: (E_1)

Bsp. 3: $X := \mathbb{R}$, $q(x) := x^2$, $\bigcup_{\alpha > 0} \{x \mid q(\alpha x) \leq \alpha\} = \bigcup_{\alpha > 0} \{x \mid x^2 \leq \frac{1}{\alpha}\} = X \implies X = \{x \mid Pq(x) \leq 1\} \implies M_1 = X \implies (E_1)$ ^{1.2, 7L}

Anderer Weg: $Pq(x) = \inf_{\alpha > 0} (\frac{1}{\alpha} x^2) = 0 \implies (E_1)$ ^{3.1, 15}

Bsp. 4: $X := \mathbb{R}^2$, $q(x, y) := \begin{cases} \frac{|x|}{y} & (y > 0) \\ |xy| & (y \leq 0) \end{cases}$

$N_1 := \{(x, y) \mid q(x, y) \leq 1\} \supset \{(x, y) \mid |x| \leq y > 0\} \cup \{(x, y) \mid x \neq 0, y \geq -\frac{1}{|x|}\} \implies \text{co}(N_1) = X = M_1 \implies (E_1)$

Bsp. 5: Satz: Vor.: X normierter VR über $\mathbb{R}$, $M[X, f_\bullet \in M^*]$

Beh.: $(\exists f \in X: f \mid M = f_\bullet, \wedge \|f\| = \|f_\bullet\|) \iff$

$(\forall \varepsilon > 0 \forall x \in M \exists m_1, m_2 \in M: \|f_\bullet\|(\|x + m_1\| + \|x + m_2\|) + f(m_1 - m_2) \leq \varepsilon)$

Bew.: Für $q := (\|f_\bullet\| \cdot \| \cdot \|, \hat{f}_\bullet)$ werte man die folgen-

de Aussage aus: $(\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X: q(x) + q(-x) \leq \varepsilon)$.

(Diese Aussage folgt aus 3.1, 1S!)

KAPITEL 4

SPEZIELLE PROBLEME DER FUNKTIONALANALYSIS

Übersicht:

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse von Kapitel 1 und 2 auf Probleme der Funktionalanalysis angewendet. Bei der Auswahl dieser Probleme ließ sich der V., abgesehen von dem in einer solchen Situation wohl unvermeidlichen persönlichen Geschmack, von folgenden Gesichtspunkten leiten:

Die Probleme sollen

- 1) von einem gewissen allgemeinen Interesse sein; und
- 2) a) entweder ungelöst oder
b) unbefriedigend gelöst oder
c) wohl gelöst sein, jedoch mit anderen Methoden.

Dabei wird darauf verzichtet, jede in Kapitel 2 entwickelte Lösungsvariante von GP 1 bzw. GP 2 auf das jeweils betrachtete Problem anzuwenden; vielmehr werden die nach Ansicht des V. dem jeweiligen Problem angemessenen Varianten benützt. Meistens werden mehrere Varianten verwendet, sofern sie einerseits sich in den Voraussetzungen wesentlich unterscheiden oder andererseits noch nicht bekannte Ergebnisse liefern.

Behandelt werden allgemeine Fragen der Existenz bzw. Fortsetzung von linearen bzw. stetigen linearen Funktionalen (in: 4.1, 4.2), Trennungssätze (in: 4.3), lokale Darstellung von sublinearen bzw. konvexen Funktionalen als (obere) Einhüllende (in: 4.4), die Lösbarkeit der linearen Gleichung $Tx = a$ (in: 4.5) und endlich die Subdifferenzierbarkeit eines Funktionals (in: 4.6).

Dabei läßt sich in Anbetracht einerseits der schon in der einschlägigen Literatur vorhandenen Ergebnisse und andererseits der verwendeten Methode (siehe Ende der Bemerkungen zu 2.3 in Kapitel 2) ein gewisses undifferenziertes und globales Vorgehen nicht vermeiden. Der V. hofft jedoch, die Bedeutung der in Kapitel 1 und 2 entwickelten Methode anhand der in diesem Kapitel behandelten Probleme deutlich gemacht zu haben.

Bemerkungen zu 4.1:

1S gibt eine Lösung des Fortsetzungsproblems für lineare Funktionale, aus dem im Falle " $q \in Q$, sublin." sofort der übliche Satz von Hahn-Banach hervorgeht; 2K und 3K sind einfache Spezialfälle.

Saskin [69] behandelt ein ähnliches Problem wie 1S, jedoch, soweit der V. der (in Russisch verfaßten) Originalarbeit entnehmen kann, unter stärkeren Forderungen an q und M (um in den Begriffen von 1S zu sprechen).

Das Resultat von Weston [60] erhält man unter Beachtung von 1.41, 10L und $C(\text{dom } q) = X$ leicht aus 1S.

4S ist eine (leichte) Verallgemeinerung von Theorem 2 bei Simons [68], der mit 2.2, 4S einfach bewiesen werden kann.

5S ist ein Beispiel der Lösung eines Momentenproblems, während 6S die Frage beantwortet, wann genau ein Funktional ϵQ ein affin-lineares Funktional als Minorante besitzt.

7S ist eine Lösung des (von Simons so genannten) Sandwich-Problems (siehe Simons [68, Beh.(6)]) und verallgemeinert das Korollar (6).

In Verallgemeinerung einer Fragestellung von R.-Salinas [64] kann mit 1.51, 3Lg) leicht folgendes Problem gelöst werden:

Vor.: X VR über $\mathbb{R}$; $X_p, X; f \in X'$

$Y \subset X$ konv. Kegel

$p: Y \rightarrow \mathbb{R}$ sublin.; $p^*: X \rightarrow \mathbb{R}$ sublin.

(bei R.-Salinas $p[Y], p^*[X] \subset \mathbb{R}^+$)

Frage: Wann gibt es $f \in X'$ mit $f|_{X_p} = f, f \leq p^*, f \leq \hat{p}$?

Auch die Ergebnisse von Bittner [71] lassen sich auf durchsichtige Weise folgendermaßen ableiten:

Vor.: X VR über $\mathbb{R}$; $p \in Q$, konv.; $x_0 \in X$

Beh.: $\exists \alpha \in \mathbb{R} \exists f \in X' : f \leq \alpha 1^X \leq p, f(x_0) + \alpha = p(x_0) \infty$

Bew.: Es gilt: $\infty \iff (\exists \alpha \in \mathbb{R} : P(p - \alpha 1^X)(x_0) \geq p(x_0) - \alpha)$, denn: (" $\implies$ " ist klar!) Nach 1.51, 13L und 1.41, 10L ist $P(p - \alpha 1^X) \in Q$, sublin., also nach Hahn-Banach:

$(\exists f \in X' : f \leq P(p - \alpha 1^X) \wedge f(x_0) = P(p - \alpha 1^X)(x_0))$, also $p(x_0) - \alpha \leq f(x_0) \leq p(x_0) - \alpha$ und $f \leq p - \alpha 1^X$ qed.

Nun gilt für $\alpha \in \mathbb{R} : P(p - \alpha 1^X)(x_0) \geq p(x_0) - \alpha \iff (\forall \beta > 0 : \frac{1}{\beta} (p(\beta x_0) - \alpha) \geq p(x_0) - \alpha) \iff (\forall \beta > 0 : p(\beta x_0) - \beta p(x_0) \geq (\beta - 1) \alpha) \iff$

$(\forall \mu \in]0, 1[: \mu \frac{1}{\mu - 1} (p(\mu x_0) - p(x_0)) \leq \alpha; \forall \lambda \in]1, +\infty[: \lambda \frac{1}{\lambda - 1} (p(\lambda x_0) - p(x_0)) \geq \alpha)$;

Ein solches $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert aber nach 1.62, 8L qed.

Es macht mit 1.51, 3Lg) und 1.41, 10L auch keine Schwierigkeiten, das Resultat von Musielak-Orlicz [60] abzuleiten, denn für $f \in X'$ gilt: $(f \leq \omega \wedge \hat{f} \leq \hat{q}) \iff (f \leq (S_p \circ \omega) \in \mathcal{R}(\overline{f_0(j|X)} =: q))$. Unter den gegebenen Vor. ist im Falle $(\alpha) X, C(\text{dom } S_p \circ \omega = \text{dom } q[X]$, im Falle $(\beta) \omega(o) < \infty$ (der Fall $\omega(o) = +\infty$ ist trivial, da dann

$\omega[X] = \{+\infty\}$) ist dom $S, P\omega[X]$, dom $(-f, (j|X_0)) = X_0K$, somit $X]$
 dom $q = \text{dom } S, P\omega + X_0$, also hat man für das gegebene Problem in
 jedem Falle nach 2.1, 1S und 2.2, 5L folgende notwendige und
 hinreichende Bedingung: $q(0) \geq 0$; Auswerten des Terms $q(0)$
 ergibt die Beh. qed.

Bemerkungen zu 4.2:

1S ist trivial; 2S gibt Lösungen des Fortsetzungsproblems
 für stetige lineare Funktionale; 3K ist eine einfache Folge-
 rung daraus, ebenso 4K. 8K beantwortet die Frage, wann ein
 Funktional eine stetige affin-lineare Minorante zuläßt. 5K
 und 6S sind Lösungen eines Momentenproblems. 7S verallgemei-
 nert einen Satz von Carling [69, Th.5] (denn für A absolut-
 konvex ist $A^{\circ\circ}$ $A^{\circ}W$ absolut-konvex und $\sigma(E_1, E_1)$ -kp.;
 in dieser Arbeit wird auch ausgeführt, wie sich z.B. ein
 komplexes Momentenproblem nach dem Vorgehen von Bohnenblust-
 Sobczyk [39] auf ein äquivalentes reelles zurückführen läßt!),
 der wiederum eine Verallgemeinerung von Theorem 12 bei Fan
 [56] und von Proposition 6 bei Hustad [59] ist. 6S verallgemei-
 nert Theorem 17 von Fan [56] auf topologische Vektorräume.
 (Wäre 6S mit 2.3, 5K und 2.3, 8K in der üblichen Weise ergänzt
 worden, könnte man 5S vollständig als Korollar von 6S betrach-
 ten!)

4K a) $\Leftrightarrow$ b) findet man schon i.w. bei Bauer [57, Hauptsatz 2]
 und stimmt mit der Formulierung bei Schaefer [71, 5.4 Theorem,
 S.227] überein. Eine andere Lösung des Problems 4K a) in re-
 ellen lokalkonvexen topologischen Vektorräumen gibt Hustad
 [60; Th.2, Cor.1], der damit u.a. Probleme der Charakterisie-
 rung derjenigen Teilräume, die für alle darauf definierten
 positiven linearen bzw. positiven stetigen linearen Funkti-
 onale positive stetige lineare Erweiterungen auf den ganzen
 Raum besitzen, löst (siehe hierzu auch Hustad [62]).
 Bahtin [68], [69] gibt für (B)-Räume ebenfalls Lösungen des Prob-
 lems 4K a) unter einschränkenden Voraussetzungen (Um in den
 Begriffen von 4K zu reden, fordert er zusätzlich $\text{Can. Ker } f_0$!).

Keine Schwierigkeiten dürfte es bereiten, ein von Pták [69]
 gestelltes Problem der gleichzeitigen Fortsetzung zweier
 stetiger linearer Funktionale, definiert auf Teilräumen eines
 normierten Raumes, sogar ganz allgemein in topologischen Vek-
 torräumen zu lösen. Doch darauf, sowie auf die Lösung vieler
 anderer Probleme, möchte der V. in dieser Arbeit (aus Platz-
 gründen) verzichten.

Bemerkungen zu 4.3:

In diesem Paragraphen wird prinzipiell gezeigt, wie sich Trennungssätze mit der in den Kapiteln 1 und 2 entwickelten Methode gewinnen lassen. Dabei zeigt es sich, daß (gewöhnliche) Trennung mit einem (unteren) Minkowski-Funktional, strikte Trennung jedoch mit einem oberen Minkowski-Funktional eng verbunden ist. Obwohl die hier formulierten Trennungssätze formal enger gefaßt sind (Trennung von $A, \{o\}!$), läßt sich damit sofort auch die Trennung zweier beliebiger Mengen erfassen ((Strikte)Trennung von M, N entspricht der (strikten)Trennung von $M-N, \{o\}!$).

Es wird darauf verzichtet, hier irgendeine Vollständigkeit anzustreben, was in Anbetracht der schon vorliegenden Ergebnisse über Trennungssätze (in diesem Rahmen) ein unmögliches Unterfangen wäre.

1S, 2S, 3K und 4K behandeln gewöhnliche Trennung, 5S strikte Trennung in topologischen Vektorräumen, während 6K beide Arten der Trennung in einem lokal-konvexen topologischen Vektorraum kurz streift.

Bemerkungen zu 4.4:

Die Aussagen 1L, 3S, 4K und 5S betreffen die (lokale) Darstellung sublinearer Funktionale als obere Einhüllende von stetigen linearen Minoranten, während 6S eine entsprechende Aussage für konvexe Funktionale macht. Viele dieser Ergebnisse werden dabei mit der Theorie der konvexen bzw. konjugierten Funktionale erzielt und sind z.T. schon bekannt (siehe hierzu die im Vergleich mit Holmes [72, S.42-46] bessere Darstellung bei Laurent [72, S.342-344]).

Jedoch ist die in 1L benützte Methode eventuell auf allgemeinere topologische Vektorräume übertragbar, während die Theorie der konvexen bzw. konjugierten Funktionale nur für lokal-konvexe topologische Vektorräume weit genug entwickelt ist.

Die Aussagen in 4.4 werden in Kapitel 5 zur Definition geeigneter dualer Probleme herangezogen.

Bemerkungen zu 4.5:

In diesem Paragraphen wird i.w. im T eines abgeschlossenen dicht definierten linearen Operators T mit Hilfe des (zu T) adjungierten Operators T^* beschrieben (siehe hierzu Schaefer [71, S.155-156, 7.1]). Dies geschieht in den Aussagen 1S und 2K. 3K gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\text{Im } T = (\text{Ker } T^*)^\perp$, während 4K eine (wohlbekannte) einfache Folgerung aus 1S ist.

Aussagen in derselben Richtung macht schon in speziellerem Zusammenhang K.Fan in [56; Th.16, Th.23, Kor.10] und in [69; Th.1-7] (mit Hilfe eines Trennungssatzes von Dieudonné).

Es wird (in dieser Arbeit) kein Wert darauf gelegt, die Aussagen in 1S durch zusätzliche Forderungen an T oder an die Räume E_1 bzw. F_1 zu konkretisieren, obgleich der V. der Ansicht ist, daß aus 1S "einiges herauszuholen" wäre.

Bemerkungen zu 4.6:

1D ist der Arbeit von Moreau [66,S.6] entnommen. Dabei heißt $q \in Q$ in x_0 subdifferenzierbar, falls $q(x_0) \in \mathbb{R} \wedge \partial q(x_0) \neq \emptyset$.

2L führt das Subdifferential eines Funktionals q (in x_0) auf dasjenige von $\text{co}(q)$ (in x_0) zurück.

3S gibt mehrere Lösungen des Problems der Subdifferenzierbarkeit von q (in x_0) in topologischen Vektorräumen, während 4K i.w. die Situation beschreibt, in der üblicherweise für q konvex, X l.c.s auf $\partial q(x_0) \neq \emptyset$ geschlossen wird (siehe z.B. Holmes [72,S22] und Moreau [66,S.60]).

5K gibt hinreichende Bedingungen für $\partial q(x_0) \neq \emptyset$.

6S löst das Problem der Subdifferenzierbarkeit für X l.c.s..

Hinweis:

Zum Begriff der Dualität siehe Schaefer [71,S.122 ff.]

4.1 Existenz- und Fortsetzungssätze für lin. Funktionale

Allgemeine Vor.: X VR über $\mathbb{R}$

1 Satz: Vor.: $q \in Q$, $M[X, f_0 \in M'$

$$\text{Beh.} : (\exists f \in X' : f|_M = f_0, f \leq q) \iff \begin{cases} \exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 1) X = C(\text{dom } q) + M - C(A) \\ 2) \exists K \in \mathbb{R}^+ \forall x \in C(\text{dom } q) \forall m \in M : \\ x - m \in A \implies Rq(x) + K \geq f_0(m) \end{cases}$$

Bew.: Mit 2, 2, 3K; 1.51, 3Lg), 2L; 1.7, 1oL ergibt sich:

$$(\exists f \in X' : f|_M = f_0, f \leq q) \iff (\exists f \in X' : f \leq R\min(Rq, \hat{f}_0)) \iff$$

$\exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.})$

1) $X = C(\text{dom } q) + M - C(A)$

2') $\exists K \in \mathbb{R}^+ \forall x \in A : R\min(Rq, f_0)(x) \geq K$, wobei

$$2') \iff (\exists K \in \mathbb{R}^+ \forall x \in C(\text{dom } q) \forall m \in M : x - m \in A \implies Rq(x) + K \geq f_0(m))$$

2 Korollar: Vor.: wie 1S, zusätzlich: $X = C(\text{dom } q) + M$

$$\text{Beh.} : (\exists f \in X' : f|_M = f_0, f \leq q) \iff Rq \geq \hat{f}_0$$

$$\text{Bew.} : \iff Rq \geq \hat{f}_0 \iff (\forall x \in C(\text{dom } q) \wedge m \in M : Rq(x) + 1 \geq f_0(x))$$

$$\iff (\forall x \in C(\text{dom } q) \forall m \in M : x - m = 0 \implies Rq(x) + 1 \geq f_0(m)),$$

also nach 1S mit $A = \{0\}$ die Beh.

3 Korollar: Vor.: wie 1S, zusätzlich: $\exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.})$ mit

1) $X = C(\text{dom } q) + M - C(A)$

2) $\forall x \in C(\text{dom } q) \forall m \in M :$

$$x - m \in A \implies Rq(x) \geq f_0(m)$$

$$\text{Beh.} : \exists f \in X' : f|_M = f_0, f \leq q$$

Bew.: 1S

4 Verallgemeinerung eines Satzes von Simons

Vor.: $q \in Q, \exists B \subset X (\dim B < \infty \wedge \langle C_- \rangle = C_- + B)$, wobei

$$C_- := \{x \mid Rq(x) < 0\}$$

$$\text{Beh.} : (\exists f \in X' : f \leq q) \iff (\forall x \in C_- : Rq(x) > -\infty ; \langle C_- \rangle \neq C_-)$$

$$\text{Bew.} : \implies f \leq q \implies f \leq Rq \implies (\forall x \in C_- : Rq(x) > -\infty) ; \text{Ann.} :$$

$\langle C_- \rangle = C_-$, also $0 \in C_- \implies Rq(0) < 0$, jedoch $Rq(0) \geq f(0) = 0$, somit W!

$$\text{Bew.} : \iff C_- \text{ Kegel, } C_- \text{ konv.} \stackrel{1.4, 5L}{\implies} (\exists x_0 \in C_- \setminus \{0\} : \langle C_- \rangle = C_- - C(\{x_0\}))$$

Ann.: $x_0 = 0 \stackrel{\text{vor.}}{\implies}$ W! , also $x_0 \in C_-$, $0 \in \text{BdA } Rq(x_0) = -1$;

$$\text{nun: } \exists V [X = \langle C_- \rangle \oplus V = C_- - C(\{x_0\}) + V ; A := x_0 - C_- + V \implies$$

A konv. absorb. Beh.: $Rq \geq -p_A$ Bew.: Sei $x \in X$ oBdA $x \in C_-$;

$$\text{sei } (\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in A) \implies (\exists v_0 \in V : -\frac{x}{\alpha} + x_0 + v_0 \in C_-) \implies v_0 \in \langle C_- \rangle \implies v_0 = 0,$$

$$\text{also: } Rq(x_0 - \frac{x}{\alpha}) < 0 \implies Rq(\frac{x}{\alpha}) \geq Rq(x_0 - \frac{x}{\alpha}) + Rq(\frac{x}{\alpha}) \geq Rq(x_0) = -1 \implies$$

$$Rq(x) \geq -\alpha, \text{ somit: } Rq(x) \geq -p_A(x), \text{ also nach 2.2, 4K}$$

die Beh. qed.

5 Satz: Vor.: $A \subset X, q: A \rightarrow \mathbb{R}$

Beh.: $(\forall I (|I| < \infty) \forall t \in \mathbb{R}^I \forall x \in A: tx = 0 \implies t(q \circ x) \geq 0) \iff$
 $(\exists f \in X': f = \hat{q})$

Bew.: Nach 1.41, 13L; 2.2, 7K gilt: $(\exists f \in X': f = \hat{q}) \iff$
 $(\exists f \in X': f \in R \min(\hat{q}, \hat{q})) \iff R \min(\hat{q}, \hat{q})(0) \geq 0 \iff$
 $(\forall I (|I| < \infty) \forall t \in \mathbb{R}^I \forall x \in A: tx = 0 \implies t(q \circ x) \geq 0) \quad \text{qed.}$

6 Satz: Vor.: $q \in Q$

Beh.: $\exists \alpha \in \mathbb{R} \exists f \in X': f + \alpha 1 \leq q \iff \begin{cases} \exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \\ 1) X = C(\text{dom } q) - C(A) \\ 2) \inf_{\beta > 0, x \in A} (co(q)(\beta x) + \beta) > -\infty \end{cases}$

Bew.: $(\exists \alpha \in \mathbb{R} \exists f \in X': f + \alpha 1 \leq q) \iff (\exists \alpha \in \mathbb{R} \exists f \in X': f \in R(q - \alpha 1))$
 $\iff \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R} \exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 1) X = C(\text{dom}(q - \alpha 1)) - C(A) \\ 2) R(q - \alpha 1) \geq -p_A \end{cases};$
 nun: $C(\text{dom}(q - \alpha 1)) = C(\text{dom } q)$; weiter: $R(q - \alpha 1) \geq -p_A \iff$
 $co(q) + p_A \geq \alpha 1 \iff \inf_{\beta > 0, x \in A} (co(q)(\beta x) + \beta) \geq \alpha$, also die Beh.

7 Satz: Vor.: $p, q \in Q$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) $\exists f \in X': p \leq f \leq q$
- b) $\begin{cases} \exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 1) X = C(\text{dom } q) - C(\text{dom}(-p)) - C(A) \\ 2) \exists K \in \mathbb{R}^+ \forall I, J (|I|, |J| < \infty) \forall t \in \mathbb{R}^I \forall \tau \in \mathbb{R}^J \forall x \in (\text{dom } q)^I \forall y \in (\text{dom}(-p))^J: \\ tx - \tau y \in A \implies t(q \circ x) + K \geq \tau(p \circ y) \end{cases}$

Bew.: Für $f \in X'$ gilt: $(p \leq f \leq q) \iff (f \leq q, f \leq -p \circ j) \iff$
 $(f \leq \min(-p \circ j, q))$, also nach 2.23K: $(\exists f \in X': p \leq f \leq q) \iff$
 $\begin{cases} \exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 1) X = \text{dom } R \min(-p \circ j, q) - C(A) \\ 2) \exists K \in \mathbb{R}^+: R \min(-p \circ j, q) \geq -p_{\frac{K}{2}A} \end{cases}$; nun nach 1.51, 2L:
 $\text{dom } R \min(-p \circ j, q) = C(\text{dom } q) + C(\text{dom}(-p \circ j)) = C(\text{dom } q) -$
 $-C(\text{dom}(-p))$; weiter gilt nach 1.7, 10L; 1.51, 3Lg);
 1.41, 3Lg); 1.02, 6b): $R \min(-p \circ j, q) \geq -p_{\frac{K}{2}A} \iff (\forall x \in A:$
 $R \min(-p \circ j, q)(x) \geq -K) \iff (\forall z_1, z_2 \in X: z_2 - z_1 \in A \implies R(-p)(z_1)$
 $+ Rq(z_2) \geq -K) \iff (\forall I, J (|I|, |J| < \infty) \forall t \in \mathbb{R}^I \forall \tau \in \mathbb{R}^J \forall x \in (\text{dom } q)^I$
 $\forall y \in (\text{dom}(-p))^J: tx - \tau y \in A \implies t(q \circ x) + K \geq (-1)(\tau(-p \circ y))$);
 also nach 1.02, 5c) die Beh. qed.

4.2 Existenz- und Fortsetzungssätze für stetige lineare Funktionale

Allgemeine Vor.: X top. VR über $\mathbb{R}$

1 Satz: $(\exists f \in X^*: f \neq 0) \Leftrightarrow (\exists U \in \underline{U}(0): U \text{ konv. } U \neq X)$

Bew.: $(\exists f \in X^*: f \neq 0) \Leftrightarrow (\exists x_0 \in X (x_0 \neq 0) \exists f \in X^* (f(x_0) \leq -1)) \Leftrightarrow$
 $(\exists x_0 \neq 0 \exists f \in X^*: f \leq p)$, wobei $p(x) := \begin{cases} -\alpha(x=x_0, \alpha \geq 0) \\ +\infty \text{ sonst} \end{cases}$, also:
 $p \in Q_A$ sublin. $p(0)=0$. Nun: $(\exists f \in X^*: f \leq p) \Leftrightarrow$
 $(\exists U \in \underline{U}(0): U \text{ konv. } p \geq -p_U)$; weiter: $p \geq -p_U \Leftrightarrow$
 $(\forall \alpha \geq 0: -\alpha \geq -p_U(\alpha x_0)) \Leftrightarrow p_U(x_0) \geq 1$; also: $(\exists f \in X^*: f \neq 0) \Leftrightarrow$
 $(\exists x_0 \in X \exists U \in \underline{U}(0): U \text{ konv. } p_U(x_0) \geq 1) \Leftrightarrow (\exists U \in \underline{U}(0): U \neq X \text{ konv.})$

2 Satz: Vor.: $q \in Q, f_0 \in M'$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) $(\exists f \in X^*: f|_M = f_0, f \leq q)$
- b) $\exists U \in \underline{U}(0) (U \text{ konv.}) \exists K \in \mathbb{R}^+ \forall x \in C(\text{dom } q) \forall m \in M:$
 $x - m \in U \Rightarrow Rq(x) + K \geq f_0(m)$
- c) $\left\{ \begin{array}{l} 1) \exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 2) \exists K \in \mathbb{R}^+ \forall x \in C(\text{dom } q) \forall m \in M: x - m \in A \Rightarrow Rq(x) + K \geq f_0(m) \end{array} \right.$
- d) $\left\{ \begin{array}{l} 1) \exists B \subset X (B \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 2) Rq \geq f_0 \\ 3) \exists K \in \mathbb{R}^+ \forall x \in C(\text{dom } q) \forall m \in M: x - m \in B \Rightarrow Rq(x) + K \geq f_0(m) \end{array} \right.$

Bew.: $(\exists f \in X^*: f|_M = f_0, f \leq q) \Leftrightarrow (\exists f \in X^*: f \leq R \min(Rq, \hat{f}))$;

Anwendung von 2.3, 5K ergibt a) $\Leftrightarrow$ b)

2.3, 7K

a) $\Leftrightarrow$ c)

2.3, 8K

a) $\Leftrightarrow$ d); dabei

benütze man jeweils 1.51, 3Lg); 1.7, 1oL.

3 Korollar: Vor.: $M[X, f_0 \in M']$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) $\exists f \in X^*: f|_M = f_0$
- b) $\exists U \in \underline{U}(0) (U \text{ konv.}) (f_0|_{M \cap U} \text{ nach oben beschränkt})$
- c) $\exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}, \hat{A} \cap M \neq \emptyset, f_0|_{M \cap A} \text{ nach oben beschränkt})$
- d) $\exists B \subset X (B \text{ konv.}, \hat{B} \cap M \neq \emptyset, f_0|_{M \cap B} \text{ nach oben beschränkt})$

Bew.: Benütze 2S mit $q := \delta_{M'} \text{red.}$

4 Korollar: Vor.: CCX konv. Kegel; $M[X, f_0] \in M'$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) $\exists f \in X^*: f \geq 0' \wedge f|_M = f_0$
- b) $\exists U \in \underline{U}(0): U \text{ konv.} \wedge f_0 [M \cap (U+C)]$ nach unten beschr.
- c) $\left\{ \begin{array}{l} \exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 1) \hat{A} \cap (M-C) \neq \emptyset \\ 2) f_0 [M \cap (A+C)] \text{ nach unten beschr.} \end{array} \right.$
- d) $\left\{ \begin{array}{l} \exists B \subset X (B \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 1) \hat{B} \cap (M-C) \neq \emptyset \\ 2) f_0 \stackrel{M_0}{\geq} 0' \\ 3) f_0 [M \cap (B+C)] \text{ nach unten beschr.} \end{array} \right.$

Bew.: Benütze 2S mit $q := \delta_{-C}$

5 Satz: Vor.: ACX , $r: A \rightarrow \mathbb{R}$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) $\exists f \in X^*: f \stackrel{A}{=} \hat{r}$
- b) $\exists U \in \underline{U}(0) (U \text{ konv.}) \exists K \in \mathbb{R}^+ \forall I (|I| < \infty) \forall t \in \mathbb{R}^I \forall x \in \hat{A}^I: \\ t x \in U \Rightarrow t(r \circ x) \geq -K$
- c) $\left\{ \begin{array}{l} \exists B \subset X (0 \in B \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 1) \hat{B} \cap \langle \hat{r} \rangle \neq \emptyset \\ 2) \exists K \in \mathbb{R}^+ \forall I (|I| < \infty) \forall t \in \mathbb{R}^I \forall x \in \hat{A}^I: t x \in B \Rightarrow t(r \circ x) \geq -K \end{array} \right.$

Bew.: Nach 1.41, 12L, 13L gilt: $(\exists f \in X^*: f \stackrel{A}{=} \hat{r}) \Leftrightarrow$

$(\exists f \in X^*: f \leq R \min(\hat{r}, \hat{r}'))$; benütze nun 2.3, 5K für a) $\Leftrightarrow$ b)

2.3, 7K für a) $\Leftrightarrow$ c);

dabei verwende man jeweils 1.7, 10L.

6 Satz: Vor.: I Menge, $\underline{x}: I \rightarrow X$, $\underline{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}$

CCX konv. Kegel

Beh.: $(\exists f \in X^*: f \geq 0' \wedge f \circ \underline{x} \stackrel{I}{=} \underline{\alpha}) \Leftrightarrow$

- $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1) \hat{A} \cap (\langle \underline{x}[I] \rangle - C) \neq \emptyset \\ 2) \exists K \in \mathbb{R}^+ \forall J \subset I (|J| < \infty) \forall t \in \mathbb{R}^J: t(\underline{x}|_J) \in A+C \Rightarrow \\ t(\underline{\alpha}|_J) \geq -K \end{array} \right. \Rightarrow$

Bew.: $(\exists f \in X^*: f \geq 0' \wedge f \circ \underline{x} = \underline{\alpha}) \Leftrightarrow (\exists f \in X^*: f \in \min(\delta_{-C}, q)) \cap \infty$,
wobei $q \in Q$ mit

$q(z) := \inf \{ t(\underline{\alpha}|_J) \mid J \subset I (|J| < \infty), t \in \mathbb{R}^J, t(\underline{x}|_J) = z \}$, denn:

$f \circ \underline{x} \stackrel{I}{=} \underline{\alpha} \Leftrightarrow (f \circ \underline{x} \stackrel{I}{\leq} \underline{\alpha} \wedge f \circ (-\underline{x}) \stackrel{I}{\leq} -\underline{\alpha})$; sei nun für $u \in I$

$q_{(u, \cdot)} := \alpha_u \stackrel{I}{\leq} \underline{\alpha} + \delta_{\{u\}}$, $q_{(u, \cdot)} := -\alpha_u \stackrel{I}{\leq} -\underline{\alpha} + \delta_{\{u\}}$, dann gilt: $f \circ \underline{x} \stackrel{I}{=} \underline{\alpha}$

$\Leftrightarrow (f \leq \min(\inf q_{(u, \cdot)}, \inf q_{(u, \cdot)}))$, also nach 1.41, 7L

die obige Darstellung von q ; die Beh. ergibt sich nun nach ∞ aus 2.3, 7K und 1.7, 10L. qed.

7 Verallgemeinerung eines Satzes von Carling

Vor.: E_1, E_2 VR über $\mathbb{R}$; $\langle E_1, E_2 \rangle$ Dualität

$o \in A \in E_1$ konv.; $g \in \mathbb{R}^+$;

I Menge, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x: I \rightarrow E_1$

Beh.: $(\exists x \in E_1: x \circ \frac{1}{g} \alpha \wedge x \in gA^\circ) \Leftrightarrow$

$(\exists W \in \mathcal{E}_2 (W \text{ absol. konv.}, \sigma(E_2, E_1) - \text{kp.}) \forall J \in I (|J| < \infty) \forall t \in \mathbb{R}^+ :$

$g \cdot \sup_{y \in A \cap W} \langle t(x|J), y \rangle \geq t(\alpha|J))$

Bew.: Nach 2.3, 5K; 1.41, 7L; 1.51, 3Lg) und Schaefer [71, S. 151]

gilt: $(\exists x \in E_1: x \circ \frac{1}{g} \alpha \wedge x \in gA^\circ) \Leftrightarrow (\exists W \in \mathcal{E}_2 (W \text{ absol. konv.},$

$\sigma(E_2, E_1) - \text{kp.}) \forall J \in I (|J| < \infty) \forall x \in E_1 \forall t \in \mathbb{R}^+ : p_{\frac{1}{g}A}(x) - t(\alpha|J) \geq$

$-p_{\frac{1}{g}W^\circ}(x - t(\frac{x}{|J|})) \infty$, dabei sei $p_{\frac{1}{g}A} := -\alpha|_I + \delta_{\{-x_i\}} (\in I)$.

Nun gilt für $x \in E_1$, $J \in I (|J| < \infty)$, $t \in \mathbb{R}^+$ nach 1.02, 6b) und

Schaefer [71, S. 126, 1.4] : $p_{\frac{1}{g}A}(x) - t(\alpha|J) \geq -p_{\frac{1}{g}W^\circ}(x - t(\frac{x}{|J|}))$

$\Leftrightarrow p_{\frac{1}{g}A}(x) + p_{\frac{1}{g}W^\circ}(x - t(\frac{x}{|J|})) \geq t(\alpha|J) \Leftrightarrow p_{\frac{1}{g}A}(x) +$

$p_{\frac{1}{g}W^\circ}(t(\frac{x}{|J|}) - x) \geq t(\alpha|J)$; also hieraus nach 1.51, 3Lg);

1.7, 5L und 1.7, 9S: $\infty \Leftrightarrow (\exists W \in \mathcal{E}_2 (W \text{ absol. konv.},$

$\sigma(E_2, E_1) - \text{kp.}) \forall J \in I (|J| < \infty) \forall t \in \mathbb{R}^+ : p_{\frac{1}{g}(A \cup W^\circ)}(t(\frac{x}{|J|})) \geq t(\alpha|J)$);

nun ist $p_{\frac{1}{g}(A \cup W^\circ)} = \overline{\text{co}}(\frac{1}{g}(A \cup W^\circ))$ (da W° Null-Umgebung bzgl.

$\gamma(E_1, E_2)$!); weiter: $\overline{\text{co}}(\frac{1}{g}(A \cup W^\circ)) = \frac{1}{g}(A \cup W^\circ)^{\circ\circ}$ nach dem

Bipolaren-Theorem, somit: $\infty \Leftrightarrow (\exists W \in \mathcal{E}_2 (W \text{ absol. konv.},$

$\sigma(E_2, E_1) - \text{kp.}) \forall J \in I (|J| < \infty) \forall t \in \mathbb{R}^+ : g \cdot \inf_{(A \cup W^\circ) \cap W} \langle t(\frac{x}{|J|}), y \rangle \geq t(\alpha|J)$).

Nun gilt nach 4.4, 3S und 1.7, 9S: $\gamma_{(A \cup W^\circ) \cap W} = \sup \{x' | x' \in p_{(A \cup W^\circ) \cap W}^\circ\} =$

$\sup \{x' | x' \in (A \cup W^\circ)^{\circ\circ}\} = \sup \{x' | x' \in A \cap W\}$, also hieraus und

Obigem die Beh. qed.

8 Satz: Vor.: $q \in Q$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $\exists f \in K^* \exists \alpha \in \mathbb{R}: f + \alpha 1^X \leq q$

b) $\exists U \in \mathcal{U}(o): U \text{ konv.} \wedge \inf_{\beta \geq 0, x \in U} (\text{co}(q)(\beta x) + \beta) > -\infty$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \exists A \in \mathcal{K}(o \in A \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1) \ A \cap C(\text{dom } q) \neq \emptyset \\ 2) \ \inf_{\beta \geq 0, x \in A} (\text{co}(q)(\beta x) + \beta) > -\infty \end{array} \right.$

Bew.: $(\exists f \in K^* \exists \alpha \in \mathbb{R}: f + \alpha 1^X \leq q) \Leftrightarrow (\exists f \in K^* \exists \alpha \in \mathbb{R}: f \in \mathcal{R}(q - \alpha 1^X))$;

Bew. a) $\Leftrightarrow$ b): Nach 2.3, 5K; 1.62, 4Ld); 1.41, 11K und

1.02, 6h) gilt nun:

$$\begin{aligned}
 a) \Leftrightarrow & (\exists U \in \underline{U}(o) (U \text{ konv.}) \exists \alpha \in \mathbb{R} : R(q - \alpha d^X) \geq -p_U) \Leftrightarrow \\
 & (\exists U \in \underline{U}(o) (U \text{ konv.}) \exists \alpha \in \mathbb{R} : co(q) + p_U \geq \alpha d^X) \Leftrightarrow \\
 & (\exists U \in \underline{U}(o) : U \text{ konv.} \wedge \inf (co(q) + p_U)[X] > -\infty) \Leftrightarrow b) .
 \end{aligned}$$

Bew. : a) $\Leftrightarrow$ c) : Analog Bew. a) $\Leftrightarrow$ b) , benütze jedoch 2.3,7K statt 2.3,5K. qed.

4.3 Trennungssätze

Allgemeine Vor.: X top. VR über $\mathbb{R}$

Abkürzungen: $(TS_A) : \exists f \in X^* (f \neq 0 \wedge f \text{ trennt } A, \{0\})$

$(TS_2) : \exists f \in X^* \exists \mu < 0 \forall x \in A (f(x) \leq \mu)$ (falls $\Delta C X$)

1 Satz: Vor.: $\Delta C X$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) (TS_A)

b) $\exists x_0 \in X \exists U \in \underline{U}(0) : U \text{ konv.} \wedge U \cap (C(A) + x_0) = \emptyset$

c) $\begin{cases} \exists B \subset X (0 \in B \text{ konv.}) \exists x_0 \in X : \\ 1) B \cap (C(A) + C(\{x_0\})) \neq \emptyset \\ 2) B \cap (C(A) + x_0) = \emptyset \end{cases}$

Bew.: a) $\Leftrightarrow (\exists x_0 \in X \setminus \{0\} \exists f \in X^* : f \notin \min(p, \delta_A))$, wobei

$$p(x) := \begin{cases} -\alpha & (x = \alpha x_0, \alpha \geq 0) \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Bew.: a) $\Leftrightarrow$ b) : $(\exists f \in X^* : f \notin \min(p, \delta_A)) \stackrel{2.3, 5K}{\Leftrightarrow} (\exists U \in \underline{U}(0) : U \text{ konv.}$

$\wedge R\min(p, \delta_{C(A)}) \geq -p_U$; weiter: $R\min(p, \delta_{C(A)}) \geq -p_U \stackrel{1.7, 9S}{\Leftrightarrow}$

$(\forall \alpha > 0 \forall x \in C(A) : p_U(\alpha x_0 + x) \geq \alpha) \Leftrightarrow (\forall x \in C(A) : p_U(x_0 + x) \geq 1)$;

somit: a) $\Leftrightarrow (\exists x_0 \in X \exists U \in \underline{U}(0) : U \text{ konv.} \wedge U \cap (C(A) + x_0) = \emptyset)$

Bew.: a) $\Leftrightarrow$ c) : $(\exists f \in X^* : f \notin \min(p, \delta_A)) \stackrel{2.3, 7K}{\Leftrightarrow} \stackrel{1.54, 2L}{\Leftrightarrow}$

$\exists B \subset X (0 \in B \text{ konv.}) \exists x_0 \in X \setminus \{0\} :$

1) $B \cap (C(A) + C(\{x_0\})) \neq \emptyset$

2') $R\min(p, \delta_{C(A)}) \geq -p_B$. Nun, da $0 \in B$ konv.: 2') $\stackrel{1.7, 40L}{\Leftrightarrow}$

$(\forall \alpha \geq 0 \forall x \in C(A) : \alpha x_0 + x \in B \Rightarrow -\alpha \geq -1) \Leftrightarrow (\forall \alpha \geq 1 \forall x \in C(A) :$

$\alpha x_0 + x \in B) \Leftrightarrow (\forall x \in C(A) : x_0 + x \in B) \Leftrightarrow (C(A) + x_0) \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$x_0 \neq 0$; also a) $\Leftrightarrow$ c) qed.

2 Satz: Vor.: wie 1S

Beh.: $(TS_A) \Leftrightarrow (\exists x_0 \in X \exists U \in \underline{U}(0) : U \text{ konv.} \wedge \forall x \in C(A + x_0) :$

$$p_{C(A+x_0) \cup \{0\}}(x) + p_U(x - x_0) \geq 1)$$

Bew.: Für $f \in X^*$ gilt: $(f \neq 0 \wedge f \text{ trennt } A, \{0\}) \Leftrightarrow$

$(\exists x_0 \in X \setminus \{0\} : f(x_0) = 1 \wedge f \leq 1^x_{A+x_0})$; sei $p := 1^x_{A+x_0} + \delta_{A+x_0}$, also wegen

1.7, 9S: $Rp = p_B := p_A$, wobei $B := \text{co}(A + x_0) \cup \{0\}$; weiter sei

$$p_2(x) := \begin{cases} \alpha (x = \alpha x_0, \alpha \in \mathbb{R}) \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

, somit nach 2.3, 5K: $(TS_A) \Leftrightarrow$

$(\exists x_0 \in X \setminus \{0\} \exists U \in \underline{U}(0) : U \text{ konv.} \wedge R\min(p_A, p_2) \geq -p_U)$; nun:

$R\min(p_A, p_2) \geq -p_U \Leftrightarrow (\forall x \in X \forall \alpha \in \mathbb{R} : p_A(x) + \alpha + p_U(x + \alpha x_0) \geq 0)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in X \forall \alpha \in \mathbb{R} : p_A(x) - \alpha + p_U(x - \alpha x_0) \geq 0) \Leftrightarrow (\forall x \in X :$

$p_A(x) + p_U(x - x_0) \geq 1) \Leftrightarrow (\forall x \in C(A + x_0) : p_B(x) + p_U(x - x_0) \geq 1)$

$\Rightarrow x_0 \neq 0$, also die Beh. qed.

3 Korollar: Vor.: wie 1S, zusätzlich: $\exists x_0 \in X \exists U \in \underline{U}(0) : U \text{ konv.} \wedge x_0 \notin U \wedge A + x_0 \in U$

Beh.: (TS_1)

Bew.: $(A + x_0) \cup \{0\} \subset U \Rightarrow B := \text{co}(A + x_0) \cup \{0\} \subset U$; sei $U_1 := -U$, also: $x \in X \Rightarrow p_B(x) + p_{U_1}(x - x_0) \geq p_U(x) + p_{U_1}(x - x_0) \geq p_U(x) + p_{U_1}(x_0 - x) \geq p_U(x_0) \geq 1$; somit nach 2S: (TS_1) qed.

4 Korollar: Vor.: $M, N \subset X$; $M \cap N = \emptyset$; M, N konv.; $M \cup N \neq \emptyset$; $M, N \neq \emptyset$

Beh.: $\exists f \in X^*: f \circ \text{id}_f$ trennt M, N

Bew.: $A := M - N$; $0 \in A \exists m \in \overset{\circ}{M}$; $n \in N$; $x_0 := n - m$, $U := A + x_0 \overset{\text{Var.}}{\Rightarrow} U \in \underline{U}(0)$ konv. (da $\overset{\circ}{M} - m \subset M - m + n - N = U$); Ann.: $x_0 \in U \Rightarrow 0 \in M - N \Rightarrow M \cap N \neq \emptyset$ W!, also $x_0 \notin U$; somit nach 3K die Beh.

5 Satz: Vor.: wie 1S

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) (TS_2)

b) $\exists U \in \underline{U}(0) : U \text{ konv. } U \cap \text{co}(A) = \emptyset$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \exists B \subset X (0 \in B \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1) \overset{\circ}{B} \cap C(A) \neq \emptyset \\ 2) \left(\bigcup_{0 \leq \alpha < 1} \alpha B \right) \cap \text{co}(A) = \emptyset \end{array} \right.$

Bew.: a) $\Leftrightarrow (\exists f \in X^*: \sup f[A] < -1) \Leftrightarrow (\exists f \in X^*: f \leq p)$, wobei $p := (-1) \cdot 1^X + \delta_A$, also:

Bew.: a) $\Leftrightarrow$ b) a) $\xrightarrow[2.3, 5K]{1.7, 5S} (\exists U \in \underline{U}(0) : U \text{ konv. } \overline{p_{\text{co}(A)}} \leq p_U) \xrightarrow{4} (\exists U \in \underline{U}(0) : U_1 \text{ konv. } U_1 \cap \text{co}(A) = \emptyset)$

Bew.: $\xrightarrow{4} U_1 := \{x \mid p_U(x) < 1\}$!

Bew.: $\xrightarrow{4} x \in X, \beta > 0, \frac{x}{\beta} \in \text{co}(A) \Rightarrow \frac{x}{\beta} \notin U_1 \Rightarrow p_{U_1}(\frac{x}{\beta}) \geq 1$, also:

$p_{U_1}(x) \geq \overline{p_{\text{co}(A)}}(x) \Rightarrow p_{U_1} \geq \overline{p_{\text{co}(A)}}$

Bew.: a) $\Leftrightarrow$ c) a) $\Leftrightarrow$ c) $\xrightarrow{1} \left\{ \begin{array}{l} \exists B \subset X (0 \in B \text{ konv.}) \text{ mit} \\ 1) \overset{\circ}{B} \cap C(A) \neq \emptyset \\ 2') \overline{p_B} \geq \overline{p_{\text{co}(A)}} \end{array} \right.$, wobei:

2') $\xrightarrow[1.8, 2L]{1.7, 40L} (\forall x \in B: 1 \geq \overline{p_{\text{co}(A)}}(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in B \forall \alpha > 0: \frac{x}{\alpha} \in \text{co}(A) \Rightarrow \alpha \leq 1) \Leftrightarrow (\forall x \in B \forall \alpha > 1: \frac{x}{\alpha} \notin \text{co}(A)) \Leftrightarrow \left(\bigcup_{0 \leq \alpha < 1} \alpha B \right) \cap \text{co}(A) = \emptyset$ qed.

6 Korollar: Vor.: X l.c.s. über $\mathbb{R}$, $A \subset X$

Beh.: a) $(TS_1) \Leftrightarrow \overline{C(A)} \neq X$

b) $(TS_2) \Leftrightarrow 0 \notin \overline{\text{co}(A)}$

Bew.: Benütze 1S bzw. 5S

4.4 Lokale Darstellung von sublinearen bzw. konvexen Funktionalen als (obere) Einhüllende

1 Lemma: Vor.: X l.c.s. über $\mathbb{R}$; $q \in Q$ sublin., $q(o) \leq o$;

$$x_o \in X: q(x_o) < \infty$$

Beh.: $\sup \{ \langle x_o, x^* \rangle \mid x^* \in X^*: x^* \leq q \} = q(x_o) \iff$
 q uhstet. in x_o .

Bew.: $\implies$: Klar!

Bew.: $\impliedby$: 1. Fall: $q(x_o) = -\infty$: Klar wegen $\sup \emptyset = -\infty$.

2. Fall: $q(x_o) \in \mathbb{R}$: Nach 2.3, 95d) gilt:

$(\exists x_o^* \in X^*: x_o^* \leq q)$; also: $q(o) = o, q \in Q_A$, somit $o \in \text{BdA } x_o \neq o$;

Falla): $o \geq q(x_o)$: Sei $K \in \mathbb{R}^+: q(x_o) > -K$, also nach Vor.:

$$(\exists U \in \mathcal{U}(x_o)): U \text{ konv.} \wedge (\forall x \in U: q(x) \geq -K) \xRightarrow{1.3, 40L} q \geq -K p_U \xRightarrow{1.7, 31} q \geq -K p_{(U \cup \{o\})} = -p_A \text{ (wobei } A := \frac{1}{K} \text{co}(U \cup \{o\}))} \xRightarrow{2.3, 7K} (\exists x^* \in X^*: q \geq x^* - p_A) \implies \langle x_o, x^* \rangle \geq -K p_U(x_o) \geq -K.$$

Fall b): $q(x_o) > o$: Sei $K \in \mathbb{R}^+: q(x_o) > K$, also nach Vor.:

$$(\exists U \in \mathcal{U}(x_o)): U \text{ konv.} \wedge (\forall x \in U: q(x) \geq K) \xRightarrow{1.9, 35} (q \geq K \bar{p}_U, o \notin U);$$

daraus mit 2.3, 4K (dort $A := \frac{1}{K}U$, wobei $\Lambda \cap \text{dom } q \neq \emptyset$):

$$(\exists x^* \in X^*: \bar{p}_A \leq x^* \leq q), \text{ also: } \langle x_o, x^* \rangle \geq \bar{p}_A(x_o) = K \bar{p}_U(x_o) \geq K.$$

2 Lemma: Vor.: X l.c.s. über $\mathbb{R}$; $q \in Q$ sublin., $q(o) \leq o$

Beh.: $q^* = \sup \{ x^* \mid x^* \in X^*: x^* \leq q \}$

Bew.: Sei $M^* := \{ x^* \mid x^* \in X^*: x^* \leq q \}$, dann gilt für $x^* \in X^*$:

$$a) \ x^* \in M^* \iff q^*(x^*) \leq o \iff q^*(x^*) = o$$

$$b) \ x^* \notin M^* \iff q^*(x^*) = +\infty$$

Bew.: a): " $\impliedby$ " ist klar nach Definition von q^* !

$$\text{Ann.: } \exists x_o^* \in M^*: q^*(x_o^*) < o \implies (\forall x \in X: \langle x, x_o^* \rangle - q(x) < o)$$

$$\implies -q(o) < o \implies q(o) > o \text{ W! (zu } q(o) \leq o)$$

Bew.: b): Nach a) gilt für $x^* \in X^*: x^* \notin M^* \iff q^*(x^*) > o$;

$$\text{Ann.: } \exists x_o^* \in X^*: q^*(x_o^*) < \infty \implies (\exists x_o \in X: q^*(x_o^*) \geq$$

$$\langle x_o, x_o^* \rangle - q(x_o) > o) \xRightarrow{q^* \text{ l.h.m.}} q^*(x_o^*) \geq$$

$$\sup_{\alpha > o} (\langle \alpha x_o, x_o^* \rangle - q(\alpha x_o)) = +\infty \text{ W! Nun:}$$

$$q^* = \sup_{x^* \in X^*} (\langle \cdot, x^* \rangle - q^*(x^*)) = \sup_{x^* \in X^*} (\langle \cdot, x^* \rangle - \delta_{M^*}(x^*)) = \sup_{x^* \in M^*} \langle \cdot, x^* \rangle \text{ qed.}$$

3 Satz: Vor.: X l.c.s. über $\mathbb{R}$; $q \in Q$ sublin., $q(o) \leq o$; $x_o \in X$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$a) \ \sup \{ \langle x_o, x^* \rangle \mid x^* \in X^*: x^* \leq q \} = q(x_o)$$

$$b) \ \left\{ \begin{array}{l} q \text{ uhstet. in } x_o \\ q(x_o) = -\infty \vee \lim_{x \rightarrow o} q(x) > -\infty \end{array} \right.$$

Bew. :=>: Benütze 2.3, 9S!

Bew. :=<=: Nach 2.3, 9Sb) gilt: $(\exists x_0^* \in X: x_0^* \leq q)$, also $cl(q) \geq x_0^*$
 $\Rightarrow cl(q) \in Q_A$, somit nach 1.10, 2S: $q^{**} = cl(q)$,
 also nach 2L und Vor.:
 $q^{**}(x_0) = \sup\{\langle x_0, x^* \rangle \mid x^* \in X: x^* \leq q\} = cl(q)(x_0) =$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = q(x_0)$ qed.

4 Korollar: Vor.: X l.c.s. über $\mathbb{R}$; $q \in Q$, $x_0 \in X$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) $\sup\{\langle x_0, x^* \rangle \mid x^* \in X: x^* \leq q\} = Rq(x_0)$
 b) $\left\{ \begin{array}{l} Rq \text{ ufstet. in } x_0 \\ Rq(x_0) = -\infty \vee \lim_{x \rightarrow x_0} Rq(x) > -\infty \end{array} \right.$

Bew.: 3S

5 Satz: Vor.: X l.c.s. über $\mathbb{R}$; $q \in Q$, $x_0 \in X$

Beh.: $Rq(x_0) = \max\{\langle x_0, x^* \rangle \mid x^* \in X: x^* \leq q\} \Leftrightarrow$
 $(Rq(x_0) \in \mathbb{R} \wedge (Rq)'(x_0, \cdot) \text{ ufstet. in } 0)$

Bew.: 2.3, 10K; 2.3, 9S.

6 Satz: Vor.: X l.c.s. über $\mathbb{R}$, $q \in Q$, $x_0 \in X$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) $co(q)(x_0) = \sup\{\langle x_0, x^* + \alpha \rangle \mid x^* \in X, \alpha \in \mathbb{R}: x^* + \alpha 1^X \leq q\}$
 b) $\left\{ \begin{array}{l} co(q) \text{ ufstet. in } x_0; \\ co(q)(x_0) = -\infty \vee \sup_{\substack{u \in U(o) \\ \beta > 0, x \in U}} (co(q)(\beta x) + \beta) > -\infty \end{array} \right.$

Bew. :=>: Benütze 4.2, 6S!

Bew. :=<=: Nach 4.2, 6S gilt:

$(\exists x_0^* \in X \exists \alpha_0 \in \mathbb{R}: x_0^* + \alpha_0 1^X \leq co(q) \leq q)$, also $cl \cdot co(q) \in Q_A$, somit
 nach 1.10, 2S und Vor.: $q^{**} = cl \cdot co(q) \Rightarrow q^{**}(x_0) =$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} co(q)(x) = co(q)(x_0)$; jedoch gilt, wie man sich
 sofort überlegt: $q^{**}(x_0) = \sup_{y \in X} (\langle x_0, y^* \rangle - q^{**}(y^*)) \stackrel{1.02, 5d)}{=} \\$
 $\sup_{y^* \in X} (\langle x_0, y^* \rangle + \inf_{y \in X} (q(y) - \langle y, y^* \rangle)) =$
 $\sup\{\langle x_0, y^* + \alpha \rangle \mid y^* \in X, \mathbb{R} \ni \alpha \leq \inf_{y \in X} (q(y) - \langle y, y^* \rangle)\} =$
 $\sup\{\langle x_0, x^* + \alpha \rangle \mid x^* \in X, \alpha \in \mathbb{R}, x^* + \alpha 1^X \leq q\}$ qed.

Beispiele

Bsp. 1: Daß 1L bei Weglassen von " $q(x_0) < \infty$ " nicht mehr gilt,

zeigt folgendes einfaches Beispiel:

$X := \mathbb{R}$, $q \in Q(\mathbb{R})$ def. durch $q(x) := \begin{cases} +\infty & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -\infty & (x < 0) \end{cases}$

also $Rq=q$; für $x_0=1$ ist q unstet., jedoch gilt die Aussage links von $\Leftarrow \Rightarrow$ nicht!

Bsp. 2: X l.c.s. Hausd. über $\mathbb{R}$, $M \subset X$ konv. abgeschlossen, $0 \in M$;
dann gilt: $M = M^{\circ\circ} = \{x \mid \langle x, x' \rangle \leq 1 \ \forall x' \in M^{\circ}\} = \{x \mid \langle x, \cdot \rangle \leq 1 + \delta_M\}^{1.7,95}$
 $\{x \mid \langle x, \cdot \rangle \leq p_{M^{\circ}}\}$; somit nach 3S: $\sup_{x \in M} \langle x, \cdot \rangle = p_{M^{\circ}}$

Bsp. 3: X l.c.s. Hausd. über $\mathbb{R}$, $M \subset X$ konv. abgeschlossen, $M \neq \emptyset$;
dann gilt für $m_0 \in M$ nach Bsp. 2: $\sup_{x \in M - m_0} \langle x, \cdot \rangle = p_{(M - m_0)^{\circ}}$, also:
 $\sup_{x \in M} \langle x, \cdot \rangle = \langle m_0, \cdot \rangle + p_{(M - m_0)^{\circ}}$

4.5 Die lineare Gleichung $Tx=a$ und ihre Lösbarkeit

1 Satz: Vor.: E_1, E_2 ($i=1,2$) VR über $\mathbb{R}$

$\langle E_1, E_2 \rangle, \langle F_1, F_2 \rangle$ duales Paar

$D(T)[E_1: D(T)=E_2; T: D(T) \longrightarrow F_1$ lin., abgeschlossen

Beh.: Für $a \in F_1$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $a \in \text{Im } T$

b) $\exists U \in \underline{U}(o): U \cap \text{Im } T^* \text{ konv.} \wedge a \in (T^{*-1}[U])^\circ$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \exists A_1 \subset \text{Im } T^* (o \in A_1 \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1) \hat{A}_1 \neq \emptyset \\ 2) a \in (T^{*-1}[A_1])^\circ \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{l} \exists A_1 \subset \text{Im } T^* (A_1 \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1) \hat{A}_1 \neq \emptyset \\ 2) a \in (\text{Ker } T^*)^\perp \cap (T^{*-1}[A_1])^\circ \end{array} \right.$

e) $\left\{ \begin{array}{l} \exists A_2, B_2 \subset \text{Im } T^* (o \in A_2 \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1) a \in (T^{*-1}[A_2])^\circ \\ 2) \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists x_\varepsilon \in B_2 \exists y_\varepsilon \in D(T): Ty_\varepsilon = x_\varepsilon \wedge \langle a, y_\varepsilon \rangle \leq (1+\varepsilon) \\ 3) \overline{\text{co}(A_2 \cup B_2)} \neq \emptyset \end{array} \right.$

Bew.: Sei $x \in E_1$, dann gilt:

(*) $x \in D(T) \wedge Tx=a \iff \forall y_2 \in D(T): \langle x, Ty_2 \rangle = \langle a, y_2 \rangle$

Bew. (*) $\implies$: $y_2 \in D(T) \implies \langle Tx, y_2 \rangle = \langle x, Ty_2 \rangle = \langle a, y_2 \rangle$.

Bew. (*) $\impliedby$: Nach Def. von T^* folgt: $x \in D(T^*) = D(T)$, da nach Vor. $T^{**} = T$ (siehe Schaefer [71, S. 155, 7.1]).

Weiter $D(T) = F_2$; nun: $(\forall y_2 \in D(T): \langle x, Ty_2 \rangle = \langle a, y_2 \rangle = \langle Tx, y_2 \rangle) \implies a = Tx$ qed.

Für $y_2 \in D(T)$ sei $q_{y_2} \in Q(E_2)$ def. durch

$q := \langle a, y_2 \rangle 1_{F_2} + \delta_{\{T y_2\}}$, also gilt wegen (*) und

$D(T)[F_2 \text{ für } x \in E_1: x \in D(T) \wedge Tx=a \iff (\forall y_2 \in D(T):$

$\langle x, Ty_2 \rangle \leq \langle a, y_2 \rangle) \iff \langle x, \cdot \rangle \leq \inf_{y_2 \in D(T)} q_{y_2} =: p$, also:

$p \in Q(E_2)$ und nach 1.41, 7L dom $p = \text{Im } T^*$, $q := R p =$

$\inf \{ \langle a, y_2 \rangle \mid y_2 \in D(T), Ty_2 = \cdot \}$.

Weiter gilt für $A \in E_2$: $q \geq -p_A \iff (\forall x_2 \in A \forall y_2 \in D(T):$

$Ty_2 = x_2 \implies \langle a, y_2 \rangle \geq -1) \iff (\forall y_2 \in T^{*-1}[A]: \langle a, y_2 \rangle \geq -1)$

$\iff a \in (T^{*-1}[A])^\circ$.

Bew. : a) $\iff$ b): Nach Obigem gilt wegen 2.3, 5K

und 2.3, 11K: a) $\iff (\exists U \in \underline{U}(o): U \cap \text{Im } T^* \text{ konv.} \wedge q \geq -p_U)$

$\iff$ b).

Bew. : a) $\iff$ c): Nach Obigem gilt wegen 2.3, 7K

und 2.3, 11K: a) $\iff (\exists A_1 \subset \text{Im } T^*: o \in A_1 \text{ konv.} \wedge \hat{A}_1 \neq \emptyset \wedge q \geq -p_{A_1})$

$\iff$ c).

Bew.: a) $\Leftrightarrow$ d): Nach Obigem gilt wegen 2.3, 8K und 2.3, 11K:

$$\text{a) } \Leftrightarrow (\exists A_2 \in \text{Im } T^* : A_2 \text{ konv.} \wedge \hat{A}_2 \neq \emptyset \wedge a \in (\text{Ker } T^*)^\perp \cap (T^{*-1}[A_2])^\circ) \\ \Leftrightarrow \text{d).}$$

Bew.: a) $\Leftrightarrow$ e): Nach Obigem gilt wegen 2.3, 12S und 2.3, 5K:

$$\text{a) } \Leftrightarrow (\exists A_2, B_2 \in \text{Im } T^* : o \in A_2 \text{ konv.}, q \geq -p_{A_2}, p_{B_2} \geq q, \text{co}(\hat{A}_2 \cup B_2) \neq \emptyset), \\ \text{jedoch gilt: } p_{B_2} \geq q \Leftrightarrow (\forall x_2 \in B_2 : q(x_2) \leq 1) \Leftrightarrow \\ (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall x_2 \in B_2 \exists y_2 \in D(T^*) : Ty_2 = x_2 \wedge \langle a, y_2 \rangle \leq 1 + \varepsilon) \Leftrightarrow \text{Bed. 2) von e).}$$

2 Korollar: Vor.: wie 1S

$$\text{Beh. : a) F\"ur } i=1,2 \text{ gilt } \text{Im } T = \bigcup_{A \in \hat{A}_i} (T^{*-1}[A])^\circ \\ \text{b) } \text{Im } T = (\text{Ker } T^*)^\perp \cap \left(\bigcup_{A \in \hat{A}_3} (T^{*-1}[A])^\circ \right), \\ \text{wobei:} \\ \hat{A}_1 := \{A \mid A \in \text{Im } T^*, \hat{A} \neq \emptyset, o \in A \text{ konv.}\} \\ \hat{A}_2 := \{U \mid U \in \underline{U}(o), \text{Im } T^* U \text{ konv.}\} \\ \hat{A}_3 := \{A \mid A \in \text{Im } T^*, \hat{A} \neq \emptyset, A \text{ konv.}\}$$

Bew.: 1S

3 Korollar: Vor.: wie 1S

$$\text{Beh. : } \text{Im } T = (\text{Ker } T^*)^\perp \Leftrightarrow \\ \forall x_2 \in (\text{Ker } T^*)^\perp \exists A_2 \in \text{Im } T^* : o \in A_2 \text{ konv.}, \hat{A}_2 \neq \emptyset, x_2 \in (T^{*-1}[A_2])^\circ \\ \text{Bew. : 1Se) mit } \text{Im } T \subset (\text{Ker } T^*)^\perp.$$

4 Korollar: Vor.: $m, n \in \mathbb{N}; A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\text{Beh. : } \text{Im } A = (\text{Ker } A^*)^\perp$$

$$\text{Bew. : } E_1 := E_2 := \mathbb{R}^m; F_1 := F_2 := \mathbb{R}^n; \text{ wegen } E'_1 = E'_2 = \mathbb{R}^m, F'_1 = F'_2 = \mathbb{R}^n \\ \text{k\"onnen in 1Se) die Bedingungen 2) und 3) \\ \text{weggelassen werden, somit gilt f\"ur } a \in \mathbb{R}^m: \\ a \in \text{Im } A \Leftrightarrow (\exists A_2 \in \text{Im } A : o \in A_2 \text{ konv.} \wedge a \in (A^{*-1}[A_2])^\circ) \\ \Leftrightarrow a \in (\text{Ker } A^*)^\perp \text{ ged.}$$

Hinweis: "o" (offener Kern von) bzgl. Im T^* !

4.6 Über die Subdifferenzierbarkeit eines Funktionals

Allgemeine Vor.: X top. VR über $\mathbb{R}$

1 Def.: Sei $q \in Q$, $x_0 \in X: q(x_0) \in \mathbb{R}$

a) $x^* \in X^*$ mit $q \geq q(x_0) + \langle -x_0, x^* \rangle$ heißt Subgradient von
 q in x_0

b) $\partial q(x_0) := \{x^* \in X^* \mid q \geq q(x_0) + \langle \cdot - x_0, x^* \rangle\}$ heißt Subdifferential
von q in x_0

2 Lemma: Vor.: $q \in Q$, $x_0 \in X: q(x_0) \in \mathbb{R}$

Beh.: a) $\partial q(x_0) \neq \emptyset \implies \text{co}(q)(x_0) = q(x_0)$

b) $\partial q(x_0) \subset \partial \text{co}(q)(x_0)$

c) $\text{co}(q)(x_0) = q(x_0) \implies \partial \text{co}(q)(x_0) \subset \partial q(x_0)$

d) $\partial q(x_0) \neq \emptyset \iff (\partial \text{co}(q)(x_0) \neq \emptyset \wedge \text{co}(q)(x_0) = q(x_0))$
 $\implies \partial q(x_0) = \partial \text{co}(q)(x_0)$

Bew.: a) $\exists x^* \in \partial q(x_0) \implies \text{co}(q(x_0 + \cdot) - q(x_0))(0) \geq 0 \stackrel{1.62, 4.1}{\implies}$
 $\text{co}(q)(x_0) = q(x_0)$

Bew.: b) $0 \in \text{BdA} \partial q(x_0) \neq \emptyset \stackrel{a)}{\implies} \text{co}(q)(x_0) = q(x_0)$; nun:

$x^* \in \partial q(x_0) \implies q(\cdot) - q(x_0) \geq \langle \cdot - x_0, x^* \rangle \implies$

$q(\cdot) - \text{co}(q)(x_0) \geq \langle \cdot - x_0, x^* \rangle \implies \text{co}(q) \geq \text{co}(q)(x_0) +$
 $+ \langle \cdot - x_0, x^* \rangle \implies x^* \in \partial \text{co}(q)(x_0)$

Bew.: c) $x^* \in \partial \text{co}(q)(x_0) \implies \text{co}(q) - q(x_0) \geq \langle \cdot - x_0, x^* \rangle \stackrel{1.62, 3.1}{\implies}$
 $q \geq q(x_0) + \langle \cdot - x_0, x^* \rangle \implies x^* \in \partial q(x_0)$

Bew.: d) Benütze a) - c)

3 Satz: Vor.: $q \in Q; x_0 \in X: q(x_0) \in \mathbb{R}$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $\partial q(x_0) \neq \emptyset$

b) $\left\{ \begin{array}{l} \exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1) \bar{A} \cap C(\text{dom } q - x_0) \neq \emptyset \\ 2) \inf_{\beta > 0, x \in A} (\text{co}(q)(x_0 + \beta x) + \beta) \geq q(x_0) \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \exists A \subset X (A \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1) \bar{A} \cap C(\text{dom } q - x_0) \neq \emptyset \\ 2) \text{co}(q)(x_0) \geq q(x_0) \\ 3) \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in A: (\text{co}(q))'(x_0, x) \geq -K \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{l} \exists A, B \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1) X = C(\text{dom } q - x_0) - C(A) \\ 2) a) (\text{co}(q))'(x_0, \cdot) \geq -p_A; b) p_B \geq R_{\min}((\text{co}(q))'(x_0, \cdot), p_A) \\ 3) \text{co}(q)(x_0) \geq q(x_0) \\ 4) \text{co}(A \cup B) \neq \emptyset \end{array} \right.$

Bew.: Sei $x^* \in X^*$, dann gilt: $x^* \in \partial q(x_0) \Leftrightarrow q^s(x_0, \cdot) \geq x^*$, also nach 2.3, 7K und 1.63, 2L:

$$\partial q(x_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} \exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1') \bigwedge C(\text{dom } q - x_0) \neq \emptyset \\ 2') q^s(x_0, \cdot) \geq -p_A \end{cases}$$

Bew.: a) $\Leftrightarrow$ b): Nach 1.41, 11K; 1.62, 4Lc) d) gilt: $2') \Leftrightarrow$

$$co(q)(x_0 + \cdot) - q(x_0) \geq -p_A \Leftrightarrow co(q)(x_0 + \cdot) + p_A \geq q(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\inf_{\beta > 0, x \in A} (co(q)(x_0 + \beta x) + \beta) \geq q(x_0) \quad \text{qed.}$$

Bew.: a) $\Leftrightarrow$ c): Nach 2Ld) und Obigem gilt: $\partial q(x_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$(\partial co(q)(x_0) \neq \emptyset \wedge co(q)(x_0) \geq q(x_0)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists A \subset X (0 \in A \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1'') \bigwedge C(\text{dom } co(q) - x_0) \neq \emptyset \\ 2'') co(q)(x_0) \geq q(x_0) \\ 3'') (co(q))^s(x_0, \cdot) \geq -p_A; \text{ nun: } 1'') \Leftrightarrow \bigwedge C(\text{dom } q - x_0) \neq \emptyset; \\ 3'') \stackrel{1.63, 3Ld)}{\Leftrightarrow} (co(q))'(x_0, \cdot) \geq -p_A; \text{ somit nach 1.7, 10L, 3L; 1.62, 11} \end{cases}$$

$$\partial q(x_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} \exists A \subset X (A \text{ konv.}) \text{ mit:} \\ 1) \bigwedge C(\text{dom } q - x_0) \neq \emptyset \\ 2) co(q)(x_0) \geq q(x_0) \\ 3) \exists K \in \mathbb{R}^* \forall x \in A: (co(q))'(x_0, x) \geq -K \quad \text{qed.} \end{cases}$$

Bew.: a) $\Leftrightarrow$ d): Nach 2Ld); 2.3, 3K und 1.63, 3Le) gilt: $\partial q(x_0) \neq \emptyset$

$$\Leftrightarrow (\partial co(q)(x_0) \neq \emptyset \wedge co(q)(x_0) \geq q(x_0)) \Leftrightarrow d).$$

4 Korollar: Vor.: wie 3S, zusätzlich: $\overbrace{x_0 \in co(\text{dom } q)}^0$
 $\exists D \subset X: D \neq \emptyset \wedge co(q)[D]$ nach oben beschränkt

$$\text{Beh.: } \partial q(x_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow co(q)(x_0) \geq q(x_0)$$

Bew. $\Rightarrow$: Klar nach 2La)

Bew. $\Leftarrow$: Nach Vor. gilt: $\exists K \in \mathbb{R} (K > q(x_0)) \forall x \in D:$

$co(q)(x) \leq K$; benütze nun 3Sd) mit $A := \{0\}$ und

$B := \frac{1}{K - q(x_0)} \cdot (x_0 - D)$, dann sind offensichtlich nach

Vor. die Bedingungen 1), 2)a), 3) und 4) erfüllt;

zu zeigen noch Bed. 2)b): $x \in -B \Rightarrow$

$$(co(q))'(x_0, (K - q(x_0))x) = P(co(q)(x_0 + \cdot) - co(q)(x_0))$$

$$((K - q(x_0))x) \leq co(q)(x_0 + (K - q(x_0))x) - co(q)(x_0) \leq K - q(x_0),$$

also: $\forall x \in -B: (co(q))'(x_0, x) \leq 1$; somit gilt nach

1.7, 10L die Bed. 2)b). qed.

5 Korollar: Vor.: wie 3S, zusätzlich:

$$\begin{cases} x_0 \in \text{co}(\text{dom } q); \text{co}(q)(x_0) \geq q(x_0) \\ \exists B_0 \in X: \text{co}(\{0\} \cup B_0) \neq \emptyset \wedge q^s(x_0, B_0) \text{ nach} \\ \text{oben beschränkt} \end{cases}$$

Beh.: $\partial q(x_0) \neq \emptyset$

Bew.: Nach Vor. gilt: $\exists K \in \mathbb{R}^+ \forall x \in B_0: q^s(x_0, x) \leq K$.

Mit $A := \{0\}$, $B := -\frac{1}{K}B_0$ sind nun nach 1.7, 1oL; 1.63, 3Le) und Vor. die Bedingungen in 3Sd) erfüllt.

6 Satz: Vor.: wie 3S, zusätzlich: X l.c.s. über $\mathbb{R}$

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) $\partial q(x_0) \neq \emptyset$
- b) $(\text{co}(q)(x_0) \geq q(x_0) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} (\text{co}(q))'(x_0, x) > -\infty)$
- c) $(\text{co}(q)(x_0) \geq q(x_0) \wedge (\text{co}(q))'(x_0, \cdot) \text{ uhstet. in } 0)$
- d) $(\text{co}(q)(x_0) \geq q(x_0) \wedge (\exists x_1 \in X: (\text{co}(q))'(x_0, x_1) \in \mathbb{R} \wedge (\text{co}(q))'(x_0, \cdot) \text{ uhstet. in } x_1))$
- e) $\exists U \in \mathcal{U}(0): \inf_{\beta > 0, x \in U} (\text{co}(q)(x_0 + \beta x) + \beta) \geq q(x_0)$

Bew.: Benütze für " $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c \Leftrightarrow d$ " 2Ld), 1.63, 3Le)f) und 2.3, 9S; " $a \Leftrightarrow e$ " folgt aus 2.3, 5K(analog " $\text{Bew. a)} \Leftrightarrow b$ " von 3S).

KAPITEL 5

GRUNDZÜGE EINER DUALITÄTSTHEORIE IN DER ALLGEMEINEN LINEAREN OPTIMIERUNG

Übersicht:

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß sich Probleme der allgemeinen linearen Optimierung ebenfalls mit der in Kapitel 1 und 2 entwickelten Methode behandeln lassen. Dabei wird (in: 5.1,1.-3.) ein (etwas unorthodoxes) allgemeines lineares Optimierungsproblem (OP) gestellt und mittels 4.4,3S geeignete hierzu duale Probleme definiert (Dabei zeigt sich der Zusammenhang zwischen primalen und dualen Problemen besonders deutlich!). Als Beispiel (in: 5.1,4.) wird gezeigt, wie ein übliches lineares Optimierungsproblem auf (OP) zurückgeführt werden kann. Danach werden (in: 5.2) für (OP) in durchsichtiger Weise (in der allgemeinen linearen Optimierung) übliche Sätze bewiesen. Anschließend werden daraus zwei i.w. von Dieter[66, S.110] stammende Aussagen für das (oben erwähnte) Beispiel abgeleitet (in: 5.3,1.) und zuletzt (in: 5.3,2.) an einem (aus Collatz-Wetterling [71,S.72/73] entnommenen) einfachen Beispiel die in 5.1/5.2 entwickelte Dualitätstheorie veranschaulicht. Ein Vergleich der Dualitätstheorie des V. mit der von Krabs [68], [71] oder von Kallina-Williams [71] ist sicher kein einfaches Unterfangen, da die Ansätze und die zur Beschreibung der Aussagen der Theorie verwendeten Begriffe zu sehr verschieden sind. Das gilt ähnlich für die entsprechende Literatur vor 1966 (siehe hierzu die Diskussion bei Dieter [66, S.111]).

Bemerkungen zu 5.1:

Zum Begriff der Dualität siehe Schaefer [71, S. 122 ff.] .
Der Operator "cl" und ähnliches bezieht sich auf die schwache Topologie $\sigma(Y, X)$ auf Y .

Bemerkungen zu 5.2:

Hier kann oBdA auf die Beweise der Teile a) der angegebenen Sätze verzichtet werden, da sie jeweils aus b) hervorgehen
(z.B. $\inf_{x \in M} \langle x, x_0^! \rangle = -i(-x_0^!) \Leftrightarrow \sup_{x \in M} \langle x, -x_0^! \rangle = i(-x_0^!) !$).

Bemerkungen zu 5.3:

1.S ist i.w. der "schwache Dualitätssatz", 1.K der "schwache Existenzsatz" von Dieter, die er aus seiner Dualitätstheorie ableitet.

Selbstverständlich könnten auch die anderen Sätze in 5.2 für das Beispiel 5.1,4. umgeschrieben werden, doch wird darauf verzichtet.

Das einfache Beispiel in 2. hat zwei Vorteile, mit denen allgemein nicht gerechnet werden kann:

a) leichte Berechnung von R_q über P_q ;

b) $i = R_q$.

Es zeigt sich, daß die Dualitätstheorie in 5.1/5.2 noch weiter auszubauen wäre, worauf aber (in dieser Arbeit) verzichtet wird.

5.1 Ein allgemeines lineares Optimierungsproblem

1. Motivierung des Ansatzes (in 2.)

Gegeben sei: X VR über $\mathbb{R}$, UCX' , $x'_0 \in X'$

$$q: U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$M := \{x \in X \mid \langle x, x' \rangle \leq q(x') \forall x' \in U\}$$

Damit kann nun folgendes allgemeine lineare Optimierungsproblem gestellt werden:

Zulässige Elemente: M

$$\text{Ziel: } \inf_{x \in M} \langle x, x'_0 \rangle \text{ bzw. } \sup_{x \in M} \langle x, x'_0 \rangle$$

(X, U) ist i.a. weder Dualität noch $U[X']$, jedoch gilt trivialerweise: $\exists Y[X']$ ($\langle X, Y \rangle$ Dualität, $x'_0 \in Y$, $U \subset Y$) (z.B. $Y := X'$)

Für ein solches Y gilt nun mit $\hat{q}(y) := \begin{cases} q(y) & (y \in U) \\ +\infty & (y \in Y \setminus U) \end{cases}$:

$M = \{x \in X \mid \langle x, \cdot \rangle \leq \hat{q}\}$, somit kann obiges Optimierungsproblem oBdA so formuliert werden:

Vor.: X, Y VR über $\mathbb{R}$, $q \in Q(Y)$, $x'_0 \in Y$, $\langle X, Y \rangle$ Dualität

(OP) Zulässige Elemente: $M := \{x \mid \langle x, \cdot \rangle \leq q\}$

$$\text{Ziel: } \inf_{x \in M} \langle x, x'_0 \rangle \text{ bzw. } \sup_{x \in M} \langle x, x'_0 \rangle$$

Mit X, Y hat man dann (mit den Topologien $\sigma(X, Y)$ bzw. $\sigma(Y, X)$) Räume vom Typ "l.c.s.", Hausd., und M kann als die Menge der ($\sigma(Y, X)$ -)stetigen linearen Funktionale f auf Y mit $f \leq q$ aufgefaßt werden. Damit haben wir einen Problemkreis für die in den Kapiteln 1 und 2 entwickelte Theorie.

2. Allgemeine Voraussetzungen und Definitionen

Vor.: X, Y VR über $\mathbb{R}$; $\langle X, Y \rangle$ Dualität; X, Y versehen mit $\sigma(X, Y)$

$q \in Q(Y)$, $x'_0 \in Y$ bzw. $\sigma(Y, X)$;

Def.: $i := \text{cl} \circ R_q$; $M := \{x \in X \mid \langle x, \cdot \rangle \leq q\}$

$$V_A := -i(-x'_0); \quad V_A := i(x'_0); \quad V_A^f := -R_q(-x'_0); \quad V_A^f := R_q(x'_0).$$

$$\mu_A := \inf_{x \in M} \langle x, x'_0 \rangle; \quad \mu_A^f := \sup_{x \in M} \langle x, x'_0 \rangle$$

3. Optimierungsproblem und zugeordnete duale Probleme

inf-(OP): Zulässige Elemente: M

$$\text{Ziel: } \inf_{x \in M} \langle x, x'_0 \rangle = \mu_A \quad \text{oder kürzer:}$$

inf-(OP): μ_1

- Def.:** a) Zugeordnetes duales Problem: ν_1 (abgekürzt: inf-(OP)_D)
 b) Zugeordnetes schwaches duales Problem: ν_1^S
 (abgekürzt: inf-(OP)_{SD})

sup-(OP): μ_2

- Def.:** a) Zugeordnetes duales Problem: ν_2 (abgekürzt: sup-(OP)_D)
 b) Zugeordnetes schwaches duales Problem: ν_2^S
 (abgekürzt: sup-(OP)_{SD})

4. Beispiel:

- a) Vor.: E_i, F_i ($i=1,2$) VR über $\overline{\mathbb{R}}$; $\langle E_1, E_2 \rangle, \langle F_1, F_2 \rangle$ Dualität
 $A: E_1 \rightarrow F_1$ schwach stet., linear
 $P_{E_1} \subset E_1$ abgeschlossener konv. Kegel; $c \in E_1$
 $P_{F_1} \subset F_1$ abgeschlossener konv. Kegel; $b \in F_1$

Man definiert in üblicher Weise folgende Optimierungsprobleme:

$$\begin{aligned} \text{inf-(OP): } & \begin{cases} M := \{x \in E_1 \mid x \in P_{F_1}, Ax - b \in P_{F_1}\} \\ \mu_1 = \inf_{x \in M} \langle x, c \rangle \end{cases} \\ \text{sup-(OP): } & \begin{cases} M := \{x \in E_1 \mid x \in P_{E_1}, Ax - b \in P_{F_1}\} \\ \mu_2 = \sup_{x \in M} \langle x, c \rangle \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Berechnung der gemäß 3. schwachen dualen Probleme

$$X := E_1, Y := E_2, x_0 := c^*$$

$$\text{nun: } Ax - b \in P_{F_1} \Leftrightarrow (\forall z \in F_2 : z^* \geq 0^* \Rightarrow \langle Ax - b, z^* \rangle \geq 0) \text{ (nach dem Bipolaren-Theorem)} \Leftrightarrow (\forall z \in F_2 : z^* \geq 0^* \Rightarrow \langle x, A^* z^* \rangle \geq \langle b, z^* \rangle)$$

$$\Leftrightarrow (\forall z \in P_{F_2}^0 : \langle x, A^* z^* \rangle \leq \langle b, z^* \rangle) \quad (\otimes) \quad . \text{ Sei für } z \in P_{F_2}^0, p_z: E_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ def. durch } p_z := \langle b, z^* \rangle + \delta_{\{A^* z^*\}}, \text{ dann gilt mit } q_1 := \inf_{z \in P_{F_2}^0} p_z, \text{ dom } q_1 = A^*[P_{F_2}^0]: (\otimes) \Leftrightarrow \langle x, \cdot \rangle \leq q_1. \text{ Weiter: } x \in P_{E_1} \Leftrightarrow$$

$$(\forall x \in E_2 : x^* \geq 0^* \Rightarrow \langle x, x^* \rangle \geq 0) \text{ (nach Bipolaren-Theorem)} \Leftrightarrow$$

$$(\forall x \in P_{E_1}^0 : \langle x, x^* \rangle \leq 0) \quad (\otimes), \text{ also mit } q_2: E_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \text{ def. durch}$$

$$q_2 := \delta_{P_{E_1}^0}: (\otimes) \Leftrightarrow \langle x, \cdot \rangle \leq q_2 \text{ (wobei dom } q_2 = P_{E_1}^0) .$$

$$\text{Somit also: } x \in P_{E_1} \Leftrightarrow \langle x, \cdot \rangle \leq q_2$$

$$Ax - b \in P_{F_1} \Leftrightarrow \langle x, \cdot \rangle \leq q_1 ; \text{ mithin: } x \in M \Leftrightarrow$$

$$\langle x, \cdot \rangle \leq R_q \text{ (mit } q := \min(q_1, q_2)) .$$

$$R_q \text{ ergibt sich nun nach 1.41,7L als } R_q(x^*) =$$

$$\inf \{ \langle b, z^* \rangle \mid z^* \in P_{F_2}^0, x_0^* \in P_{E_2}^0, A^* z^* + x_0^* = x^* \} \quad (x^* \in D_1), \text{ also:}$$

$$\nu_1^S = -R_q(-c^*) = \sup \{ \langle b, z^* \rangle \mid z^* \in P_{F_2}^0, A^* z^* - c^* \in P_{E_1}^0 \} \text{ und}$$

$$\nu_2^S = R_q(c^*) = \inf \{ \langle b, z^* \rangle \mid z^* \in P_{F_2}^0, A^* z^* - c^* \in -P_{E_1}^0 \} .$$

Dies sind die sonst üblichen Definitionen der zu $\inf$ -(OP) bzw. $\sup$ -(OP) dualen Probleme.

Beim Vergleich mit den ursprünglichen Problemen ergeben sich folgende Übergänge:

$\inf$ -(OP) $\longrightarrow$ $\inf$ -(OP)_{sd}

$$\begin{array}{lll} x & \longrightarrow & z^* \\ c^* & \longleftrightarrow & b \\ A & \longrightarrow & A^* \\ P_{F_A} & \longrightarrow & P_{F_A}^* \\ P_{F_A} & \longrightarrow & -P_{F_A}^* \end{array}$$

$\sup$ -(OP) $\longrightarrow$ $\sup$ -(OP)_{sd}

$$\begin{array}{lll} x & \longrightarrow & z^* \\ c^* & \longleftrightarrow & b \\ A & \longrightarrow & A^* \\ P_{F_A} & \longrightarrow & -P_{F_A}^* \\ P_{F_A} & \longrightarrow & P_{F_A}^* \end{array}$$

Also gilt nach Robertson[67, S.48, Folg.] und dem Bipolar-Theorem: Zweimalige schwache Dualisierung des Problems ergibt das ursprüngliche Problem!

5.2 Grundzüge einer Dualitätstheorie zu (OP)

Allgemeine Vor.: siehe 5.1,2.

1 (Schwacher Dualitäts-) Satz:

Beh.: a) $\mu_1 \geq \nu_1^s$; Rq uhstet. in $(-x_0^s) \Leftrightarrow \nu_1^s = \nu_1$

b) $\mu_1 \leq \nu_1^s$; Rq uhstet. in $x_0^s \Leftrightarrow \nu_1^s = \nu_1$

Bew.: Sei $oDdA M \neq \emptyset$; $\nu_1 \leq \nu_1^s$ ist klar nach Definition; weiter:

$x \in M \Rightarrow \langle x, \cdot \rangle \leq q \Rightarrow \langle x, \cdot \rangle \leq i \Rightarrow \mu_1 \leq \nu_1$, also der erste Teil von b); der zweite Teil von b) folgt aus 1.9, 1Dc).

2 (Starker Dualitäts-) Satz: Vor.: $M \neq \emptyset$

Beh.: a) $\nu_1 = \mu_1$

b) $\nu_2 = \mu_2$

Bew.: b) folgt aus 4.4, 3S nach Vor.

3 Satz: Beh.: $M \neq \emptyset \Leftrightarrow \lim_{x' \rightarrow 0^s} Rq(x') > -\infty$

Bew.: 2.3, 9S

4 Satz: Beh.: a) $(\exists x_0 \in M: \langle x_0, x'_0 \rangle = \nu_1) \Leftrightarrow (\lim_{x' \rightarrow 0^s} i'(-x'_0, x') > -\infty, \nu_1 \in \mathbb{R})$ b) $(\exists x_0 \in M: \langle x_0, x'_0 \rangle = \nu_2) \Leftrightarrow (\lim_{x' \rightarrow 0^s} i'(x'_0, x') > -\infty, \nu_2 \in \mathbb{R})$

Bew.: b) Benütze 1.9, 3La b); 1.41, 17L und 2.3, 10K.

5a Satz: Vor.: $(\exists D \subset Y: -x_0^s \in \bar{D} \wedge Rq[D] \text{ nach oben beschränkt}),$ $\nu_1^s < +\infty$

Beh.: $\exists x_0 \in M: \langle x_0, x'_0 \rangle = \nu_1^s = \nu_1$

5b Satz: Vor.: $(\exists D \subset Y: x_0^s \in \bar{D} \wedge Rq[D] \text{ nach oben beschränkt}),$ $\nu_2^s > -\infty$

Beh.: $\exists x_0 \in M: \langle x_0, x'_0 \rangle = \nu_2^s = \nu_2$

Bew.: Nach Laurent [72; S. 333, Th. (6.2.7)] gilt: $\nu_1^s = \nu_1$; Vor. $\Rightarrow i(x'_0) < +\infty \Rightarrow i(x'_0) = \nu_1 \in \mathbb{R}$; weiter nach Vor.: $\exists K \in \mathbb{R}^+ \forall x' \in D: i(x') \leq K$; also nach 1.62, 11Kb c) und 1.02, 5d): $(\forall x' \in Y: i(x'_0 + x') - i(x'_0) \geq i'(x'_0, x')) \Rightarrow (\forall x' \in Y: i'(x'_0, x') \geq -i'(x'_0, -x')) \geq (-1) \cdot (i(x'_0 - x') - i(x'_0)) = i(x'_0) - i(x'_0 - x')$, also: $\lim_{x' \rightarrow 0^s} i'(x'_0, x') \geq i(x'_0) + (-K)$, somit nach 43b): $\exists x_0 \in M: \langle x_0, x'_0 \rangle = \nu_2$.

5.3 Beispiele

1. Ergänzung zum Beispiel 5.1, 4.

Satz: Vor.: siehe 5.1, 4.a); zusätzlich:

$$\left| \begin{array}{l} \exists z_0^* \in D_1: z_0^* \in P_{F_1}^* \wedge A^T \cdot z_0^* + c^* \in P_{E_1}^* \\ v_1^* \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Beh.: $\exists x_0^* \in M: \langle x_0^*, c^* \rangle = v_1^*$

Bew.: Nach Vor.: $(\exists D \in \mathcal{D}_1: -c^* \in D \wedge Rq[D] \leq \langle b, z_0^* \rangle)$, also nach 5.2, 5aS die Beh.

Korollar: Vor.: siehe 5.1, 4.a); zusätzlich:

$$\left| \begin{array}{l} \exists z_0^* \in D_1: z_0^* \in P_{F_1}^* \wedge A^T \cdot z_0^* + c^* \in P_{E_1}^* \\ M \neq \emptyset \end{array} \right.$$

Beh.: $\exists x_0^* \in M: \langle x_0^*, c^* \rangle = v_1^*$

Bew.: $v_1^* > -\infty$; weiter wegen $M \neq \emptyset: v_1^* < +\infty$, also $v_1^* \in \mathbb{R}$; benütze nun obigen Satz.

2. Beispiel:

Gegeben sei folgendes (OP): $M := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall t \in [0, 1]: x_1 + tx_2 \geq \sqrt{t} \}$
Ziel: $\inf_{x \in M} x^T c = \mu_1$
 (dabei sei $c \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben!)

a) Berechnung des schwachen dualen Problems zu (OP)

(gemäß 5.1, 3.)

$$X := Y := \mathbb{R}^2, \text{ Dualität } \langle x, y \rangle = x^T y$$

$$q \in \mathcal{Q}(Y) \text{ sei def. durch } q(y_1, y_2) := \begin{cases} -\sqrt{-y_2} & (-y_2 \in [0, 1], y_1 = -1) \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{also: } M = \{ x \in X \mid \langle x, \cdot \rangle \leq q \}, \quad x_1^* := (c_1, c_2)^T$$

Berechnung von Rq: q konv. $\xRightarrow{1.2, 2L} Pq$ subadd. $\xRightarrow{1.4.1, 10L}$

$$Rq = S_q^* \cdot Pq$$

$$\text{Sei } (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2, \text{ nun: } (\alpha > 0: (\alpha y_1, \alpha y_2)^T \in \text{dom } q) \iff$$

$$(\alpha > 0: \alpha y_1 = -1 \wedge -\alpha y_2 \in [0, 1]) \iff (\alpha > 0: y_1 < 0, \alpha = -\frac{1}{y_1}, 0 \geq y_2 \geq y_1);$$

$$\text{somit } Pq(y_1, y_2) = \begin{cases} -y_1 \sqrt{\frac{y_2}{y_1}} & (0 \geq y_2 \geq y_1, y_1 < 0) \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}; \text{ also:}$$

$$Rq(y_1, y_2) = S_q^* \cdot Pq(y_1, y_2) = \begin{cases} -\sqrt{y_1 \cdot y_2} & (0 \geq y_2 \geq y_1) \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{dom } Rq = \{ (y_1, y_2)^T \mid 0 \geq y_2 \geq y_1 \}, \text{ also}$$

$$\inf\text{-(OP)}_{\mathcal{D}} v_1^* = -Rq(-c_1, -c_2)$$

b) Anwendung der Theorie auf verschiedene charakteristische Fälle von c

Man sieht sofort (da $Rq \mid \text{dom } Rq$ stet. und

dom R_q abgeschlossen!): R_q ufstet. ; also ist hier sogar schon $i = c1 \circ R_q = R_q$.

$\lim_{x \rightarrow 0} R_q(x) \geq 0$, also nach 5.2,3S: $M \neq \emptyset$, mithin nach 5.2,2S: $(\forall c \in \mathbb{R}^1: \inf_{x \in M} x \cdot c = -i(-c))$.

Sei $-c \in \text{dom } i$, also gilt für $y \in \mathbb{R}^1: i'(-c, y) = \frac{1}{2\sqrt{c_1 \cdot c_2}} \cdot y^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, wie man leicht nachrechnet!

1. Fall: $c_1 := 1, c_2 := \frac{1}{1}$; $\mu_1 = \nu_1 = \frac{1}{2}$, $-c \in \text{dom } i$, also: 5.2,4Sa) in Verbindung mit Bew. zu 2.3,1oK ergibt:

$$\exists x_0 \in M: x_0^T \cdot c = \frac{1}{2}; \text{ n\"amlich } x_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Allgemeiner kann sofort für $-c \in \text{dom } i$ geschlossen werden:

$$\exists x_0 \in M: x_0^T \cdot c = -i(-c), \text{ n\"amlich } x_0 = \frac{1}{2\sqrt{c_1 \cdot c_2}} \cdot (c_1, c_1)^T$$

2. Fall: $c_1 := 1, c_2 := 0$; $\mu_1 = \nu_1 = 0$, $-c \notin \text{dom } i$; es gilt:

$$i'(-c, (0, -1)^T) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} \cdot i\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \inf \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \mid \alpha > 0, 0 \geq -\alpha \geq -1 \right\} = -\infty,$$

also nach Bew. zu 2.3,1oK: $\neg (\exists x_0 \in M: x_0^T \cdot c = 0)$.

3. Fall: $c_1 := c_2 := 1$; $\mu_1 = \nu_1 = 1$, $-c \notin \text{dom } i$; hier macht die Berechnung von $i'((-1), y)$ etwas Schwierigkeiten! Man erhält

$$i'((-1), \cdot) \notin Q_1, \text{ somit nach 2.2,9K und 5.2,4Sa): } (\exists x_0 \in M: x_0^T \cdot c = 1).$$

LITERATURVERZEICHNIS

- Agnew, R.P. [37] : On the existence of linear functionals over linear spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937) 868-872.
- Agnew, R.P. [38] : Linear functionals satisfying prescribed conditions. Duke Math. J. 4 (1938) 55-77.
- Bahtin, I.A. [68] : Über die Fortsetzung linearer positiver Funktionale. Originalarbeit: Sibir. mat. Zurn. 9 (1968) 475-484. Übersetzung: Siber. math. J. 9 (1968) 359-366 (1969).
- Bahtin, I.A. [69] : Über die Fortsetzung einer Klasse von linearen positiven Funktionalen. Sibir. mat. Zurn. 10 (1969) 1197-1205.
- Bauer, H. [57] : Über die Fortsetzung positiver Linearformen. S.-Bericht math. naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1957 (1958) 177-190.
- Bittner, L. [71] : A Remark concerning Hahn-Banach Extension theorem and the Quasilinearisation of convex functionals. Math. Nachr. 51 (1971) 357-362.
- Bohnenblust, H.F. - Sobczyk, A. [38] : Extensions of functionals on complex linear spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938) 91-93.
- Bourbaki, N. [66] : Espaces vectoriels topologiques. Chap. I-II, Hermann, Paris (1966) 178 S.
- Carling, L.N. [69] : Linear inequalities and the abstract moment problem in topological Vector spaces. Math. Scandinav. 24 (1969) 221-231 (1970).
- Collatz, L. - Wetterling, W. [71] : Optimierungsaufgaben. Heidelberger Taschenbücher, Springer-Verlag, 2. Auflage (1971) 222 S.
- Dieter, U. [66] : Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen I: Dualitätstheorie. Z. Wahrsch. th. verw. Geb. 5 (1966) 89-117.
- Dunford, N. - Schwartz, J.T. [50] : Linear Operators, Part I, General Theory. New York (1958) 858 S.
- Fan, K. [56] : On systems of linear inequalities. Ann. of Math. Studies 38, Princeton, (1956) 99-156.
- Fan, K. [69] : Asymptotic cones and duality of linear relations. J. Appr. th. 2 (1969) 152-159.
- Foguel, S.R. [53] : On a theorem by A.E. Taylor. Proc. Amer. Math. Soc. vol. 9 (1953) 325

Fullerton, R.E. - Braunschweiger, C.C. [66] : Quasi-interior points and the extension of linear functionals. Math. Ann. 162 (1966) 214-224.

Holmes, R. [71] : Smoothness indices for convex functions and the unique Hahn-Banach extension problem. Math. Z. 119 (1971) 95-110.

Holmes, R.B. [72] : A Course on Optimization and best Approximation. Lecture Notes in Math. ²⁵⁷ Springer-Verlag, Berlin-H.-N.Y. (1972) 233 S.

Hustad, O. [59] : On positive and continuous extension of positive functionals defined over dense subspaces. Math. Scand. 7 (1959) 392-404.

Hustad, O. [60] : Linear inequalities and positive extensions of linear functionals. Math. Scandinav. 8 (1960) 333-338.

Hustad, O. [62] : Extensions of positive linear functionals. Math. Scandinav. 11 (1962) 63-78.

Kallina, C. - Williams, A.C. [71] : Linear programming in reflexive Spaces. SIAM Review 13 (1971) 350-376.

Kaufman, R. [66] : Interpolation of additive functionals. Studia Math. 27 (1966) 269-272.

Köthe, G. [66] : Topologische lineare Räume I. Springer-Verl. Berlin.-H.-N.Y. (1966) 456 S.

Krabs, W. [68] : Lineare Optimierung in halbgeordneten Vektorräumen. Num. Math. 11 (1968) 220-231.

Krabs, W. [71] : Zur Dualitätstheorie bei linearen Optimierungsproblemen in halbgeordneten Vektorräumen. Math. Zeitschrift 121 (1971) 320-328.

Laurent, P.J. [72] : Approximation et optimisation. Enseignement des sciences, 13. Paris: Hermann, XII (1972) 531 S.

Mazur, S. - Orlicz, W. [53] : Sur les espaces métriques linéaires (II). Studia Math. 13 (1953) 137-179.

Moreau, J.J. [63] : Remarques sur les fonctions à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ définies sur un demi-groupe. C.R. Acad. Sci. Paris (1963) 3107-3109.

Moreau, J.J. [66] : Fonctionnelles convexes. Mimeographed lecture notes, 107 pp. Séminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles, Collège de France (1966).

Moreau, J.J. [70] : Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques. J. de Math. pur appl. IX Sér. 49 (1970) 109-154.

Musielak, J. - Orlicz, W. [60] : A generalisation of certain extension theorems. Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. math. astron. phys. 8 (1960) 531-534.

Phelps, R.R. [60] : Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best approximation. Transactions Am. math. Soc. 95 (1960) 238-255.

Phelps, R.R. [63] : Support cones and their generalisations. Proc. Sympos. pure Math. 7 (1963) 393-401.

Poulsen, E.T. [66] : Eindeutige Hahn-Banach Erweiterungen. Math. Ann. 162 (1966) 225-227.

Pták, V. [56] : On a Theorem of Mazur and Orlicz. Studia Math. 15 (1956) 365-366.

Pták, V. [69] : Simultaneous extensions of two functionals. Czechosl. math. J. 19 (94) (1969) 553-556.

Robertson, A.P. - Robertson, W.J. [67] : Topologische Vektorräume. Bibliogr. Inst. Mannheim (1967) 169 S.

Racine, C. [68] : Note on the Hahn-Banach theorem in normed spaces. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A 34 (1968) 190-191.

R.-Salinas, B. [64] : Über die Fortsetzung linearer Funktionale. Collect. Math. 16 (1964) 67-78.

Saskin, Ju.A. [69] : Bemerkungen über die Fortsetzung linearer Funktionale. Mathem. Cluj 11(34) (1969) 147-154.

Schaefer, H.H. [71] : Topological Vector Spaces. Springer-Verlag, Berlin-H.-N.Y. (1971) 294 S.

Shukla, R. [66] : On unique extensions of linear functionals. Proc. nat. Inst. Sci. India Part A 32 (1966) 113-115.

Sikorski, R. [53] : On a theorem of Mazur and Orlicz. Studia Math. 13 (1953) 180-182.

Taylor, A.E. [39] : The extension of linear functionals. Duke Math. J. Vol. 5 (1939) 538-547.

Weston, J. [60] : A note on the extension of linear functionals. Americ. Math. Monthly 67 (1960) 444-445.

Nachtrag:

Simons, S. 68 : Extended and sandwich versions of the Hahn-Banach theorem. J.math. Anal. Appl. 21 (1968) 112-122.

L E B E N S L A U F
=====

Ich, Klaus Ströhle, wurde am 10. Juni 1942 in Balingen als Sohn des Kaufmanns Fritz Ströhle und seiner Ehefrau Else, geb. Flatt geboren.

Von 1949 bis 1953 besuchte ich die Volksschule, anschließend das Gymnasium in Tuttlingen, wo ich am 17. März 1962 die Reifeprüfung ablegte.

Von Sommer 1962 bis Sommer 1969 studierte ich Mathematik an den Universitäten Tübingen, Freiburg und München mit dem Studienziel "Diplom - Hauptprüfung Mathematik."

Am 19. Juni 1969 legte ich an der Universität München die Diplom - Hauptprüfung in Mathematik mit der Gesamtnote "Sehr Gut" ab.

Im August 1970 heiratete ich die Volksschullehrerin Cäcilia Westig.

Vom 1. September 1969 bis zum 31. August 1971 war ich als Lehrer für Mathematik und Physik (11., 12. und 13. Klasse) am Privat-Gymnasium Dr. Schönhärl und Wild, München, tätig, anschließend bis zum 31. Oktober 1971 als Mathematiklehrer (8. und 9. Klasse) am Gisela-Gymnasium, München.

Seit dem 1. Januar 1972 erhalte ich aufgrund von Gutachten von Professor Dr. G. Hämmerlin und Dozent Dr. K.-H. Hoffmann für das Thema "Varianten des Satzes von Hahn-Banach mit Anwendungen" ein Promotionsstipendium nach dem Graduiertenförderungsgesetz.

Klaus Ströhle

